DM 8B - Asymptotique de la série des inverses des nombres premiers

On désigne par $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par $\mathbb{P}_n$ l'ensemble $\mathbb{P} \cap [\![1, n]\!]$. Le but du problème est de déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{1}{p}$, quand $n \to +\infty$.

1 Préliminaires analytiques

1. En comparant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, les valeurs de $\dfrac{1}{k}$, $\dfrac{1}{k+1}$ et $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$, montrer que

$$\ln n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n + 1.$$

2. Montrer de manière analogue que

$$n \ln n - n \leq \sum_{k=1}^{n} \ln k \leq n \ln n - n + 1 + \ln n.$$

En déduire que

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

2 Minoration

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Jusqu'à la fin du problème, on note $A_n = \displaystyle\sum_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{1}{p}$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $r \in [\![1, \lfloor\sqrt{m}\rfloor]\!]$, $k \in \mathbb{N}$ et $p_1, \ldots, p_k$ deux à deux distincts dans $\mathbb{P}_m$ tels que $m = r^2 p_1 \ldots p_k$.

4. En déduire l'inégalité suivante :

$$H_n \leq \sum_{r=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{r^2} \left(\prod_{p \in \mathbb{P}_n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)\right).$$

5. Montrer que $\displaystyle\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{r^2} \leq 2$, pour tout $N \geq 1$.

6. En déduire que $e^{A_n} \geq \dfrac{1}{2} H_n$.

3 Majoration

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note f_k l'application définie de $(\mathbb{P}_n)^k$ dans $\mathbb{N}^*$ par

$$f_k : (p_1, \ldots, p_k) \mapsto p_1 \ldots p_k.$$

7. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Identifier les éléments de l'image de f_k et montrer qu'un élément dans l'image de f_k a au plus $k!$ antécédents.

8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente que $\dfrac{A_n^k}{k!} \leq H_{n^k}$, puis que

$$A_n \leq (k!)^{1/k}(1 + k \ln n)^{1/k}.$$

Pour tout $n \geq e^e$, on pose $k_n = \lfloor \ln \ln n \rfloor$.

9. Montrer que $(k_n!)^{1/k_n} \sim \dfrac{\ln \ln n}{e}$, quand $n \to +\infty$.

10. Montrer que $\dfrac{\ln(1 + k_n \ln n)}{k_n} \to 1$, quand $n \to +\infty$.

4 Conclusion

11. Montrer[1] que $\displaystyle\sum_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{1}{p} \sim \ln \ln n$, quand $n \to +\infty$.

[1] Résultat dû à Euler, publié en 1744.