Arithmétique

1 Divisibilité

Exercice 1. ♣ – ◐○○ *Sans congruences*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $7 \mid 3^{105} + 4^{105}$.
2. Montrer que $8 \mid n^3(n^6 - 1)$.
3. Montrer que si n est impair, $24 \mid n(n^2 - 1)$.
4. Montrer que $n^2 \mid (n+1)^n - 1$.

Exercice 2. ♢ – ◐○○ *Produit de k entiers successifs*
Montrer que le produit de k entiers successifs est divisible par $k!$.

Exercice 3. ●○○ $a^b = b^a$
Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$, $a^b = b^a$.

Exercice 4. ●○○ *Équations simples*

1. Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $n+1 \mid n^2+1$?
2. Pour quels entiers $n \in \mathbb{Z}$ a-t-on $n-3 \mid n^3-3$?

Exercice 5. ♣ – ●◐○ *Nombres avec des* 1 *et des* 2
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique nombre k à n chiffres, écrit uniquement avec des 1 et des 2, tel que $2^n \mid k$.

Exercice 6. ●●○ *Produit de trois entiers consécutifs*
Pour $n \geq 2$, montrer que le produit de trois entiers consécutifs n'est pas une puissance n-ème.

Exercice 7. ♣ – ●●◐ *Puissances de* 2 *et de* 3

1. Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$: $3^n - 2^m = 1$.
2. Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $2^n \mid 3^n - 1$.

Exercice 8. ●●● *IMO, 1990*
Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n^2 \mid 2^n + 1$.

2 Congruences

EXERCICE 9. ○○○ *Résolution de congruences*

1. Quel est le reste de 2020^{2020} dans la division euclidienne par 7 ?
2. Déterminer un x tel que $429x \equiv 1\,[700]$.
3. Résoudre $24x \equiv 3\,[9]$.

EXERCICE 10. ♣/♢ – ●○○ *Carré finissant par des* 9
Quel est le nombre maximal de 9 terminant l'écriture décimale d'un carré parfait ?

EXERCICE 11. ●○○ *Applications du petit théorème de Fermat*

1. Quel est le reste de la division euclidienne de $2^{70^{71}}$ par 13 ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n^7 \equiv n\,[42]$.
3. Trouver les nombres premiers p tels que p divise $2^p + 1$.
4. Montrer que 13 divise $2^{70} + 3^{70}$.

EXERCICE 12. ●◐○ *Différences de puissances*
Déterminer $\min\left\{|36^n - 5^m|, (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$.

EXERCICE 13. ●◐○ *Somme de trois carrés*
Soit n un entier somme de trois carrés.

1. Montrer que n n'est pas congru à 7 modulo 8.
2. Montrer plus généralement que n n'est pas de la forme $4^a(8b+7)$, avec $a, b \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 14. ●◐○ $3^x = 8 + y^2$
Soit $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ une solution de $3^x = 8 + y^2$.

1. Déterminer la parité de x.
2. Conclure.

EXERCICE 15. ♣/♢ – ●●◐ *Lemme de Hensel*

1. Soit p un nombre premier impair. Montrer l'équivalence
$$\left(\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 + x + 3 \equiv 0\,[p]\right) \iff \left(\exists y \in \mathbb{Z} : y^2 \equiv -11\,[p]\right).$$
2. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation (E_n) :
$$x^2 + x + 3 \equiv 0\,[n].$$
   (a) Résoudre (E_2) et (E_3).
   (b) En suivant le raisonnement de la première question, résoudre (E_n) pour $n \in \{5,7,11\}$.
   (c) Déduire de ce qui précède une résolution de (E_n) dans les cas $n \in \{10,15,55,105\}$.
   (d) Résoudre l'équation (E_n) dans le cas $n = 121$ puis dans les cas $n \in \{25,125\}$.
   (e) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe deux éléments $a \neq b \in [\![0, 5^k - 1]\!]$ tels que les solutions de (E_{5^k}) soient exactement les entiers congrus à a ou b modulo 5^k.

3 PGCD, relations de Bézout, primalité relative

EXERCICE 16. ○○○ *Fraction irréductible*
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fraction $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible.

EXERCICE 17. ○○○ *Calculs de pgcd et relations de Bézout*
Calculer le pgcd et une relation de Bézout pour : 151 et 77 ; 1320 et 720.

EXERCICE 18. ◐○○ *Calcul de pgcd, expression littérale*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut le pgcd de $2n+1$ et $9n+4$? de $2n-1$ et $9n+4$?

EXERCICE 19. ●○○ *Équations linéaires*

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $26x+15y=4$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$: $5x-3y+8z=1$.

EXERCICE 20. ●○○ $(n+1)$ *divise* $\binom{2n}{n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux. En déduire que $(n+1) \mid \binom{2n}{n}$.

EXERCICE 21. ●○○ *Puissances de* $1+\sqrt{2}$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe deux entiers a_n et b_n tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
2. Montrer que $a_n \wedge b_n = 1$.

EXERCICE 22. ♣/♢ − ●○○ *Produit et ppcm fixés*
Soient $P, m \in \mathbb{N}^*$.
A quelles conditions sur P et m existent-ils deux nombres x et y tels que $xy = P$ et $x \vee y = m$?

EXERCICE 23. ●◐○ *PGCD des nombres de Fibonacci*
On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On rappelle les formules suivantes, montrées dans un TD précédent, valables pour $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$:

a) $F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$; b) $F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1}F_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \wedge F_{n+1} = 1$.
2. Montrer que pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, en notant r le reste dans la division euclidienne de n par m, on a $F_n \wedge F_m = F_m \wedge F_r$.
3. En déduire, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, la valeur de $F_n \wedge F_m$.

EXERCICE 24. ♣/♢ − ●●○ *Relations de Bézout à coefficients positifs*
Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux. On note $A = \{au+bv, (u,v) \in \mathbb{N}^2\}$.

1. Montrer que $ab-a-b \notin A$.
2. Montrer que, pour tout $k > ab-a-b$, $k \in A$.

4 Nombres premiers

Exercice 25. ◐○○ $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\sqrt{n} \in \mathbb{N} \iff \sqrt{n} \in \mathbb{Q} \iff \exists k \in \mathbb{N}, n = k^2$.

Exercice 26. ●○○ *Ensemble d'entiers successifs sans nombres premiers*
Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une suite de N nombres consécutifs dont aucun n'est premier.

Exercice 27. ♢ – ●○○ *Témoins de Fermat*
Montrer qu'un entier $n \geq 2$ n'est pas premier ssi il existe $a \in [\![2, n-1]\!]$ tel que $a^{n-1} \not\equiv 1\,[n]$.

Exercice 28. ♣ – ●○○ *Nombres premiers jumeaux*
Deux nombres premiers p et q sont jumeaux si $|p-q| = 2$.

1. Montrer que p et q sont jumeaux ssi $pq+1$ est un carré.
2. Si p et q sont des nombres premiers jumeaux supérieurs à 5, montrer que $p+q \equiv 0\,[12]$.

Exercice 29. ♢ – ●○○ *Premiers congrus à* 3 *modulo* 4
Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Exercice 30. ●◐○ *Une équation diophantienne*
Soit p un nombre premier. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$: $x^2 + px = y^2$.

Exercice 31. ♣ – ●◐○ *L'invasion des Uns*

1. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ deux entiers. Montrer que $n \wedge m = 1$ ssi il existe $k \geq 1$ tel que $n^k \equiv 1\,[m]$.
2. En déduire que tout nombre premier à 10 a un multiple dont l'écriture décimale ne comporte que le chiffre 1.

Exercice 32. ●◐○ *Nombre, somme et produit des diviseurs*
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n et $S(n)$ la somme des diviseurs de n.

1. Établir une formule pour $\tau(n)$ et $S(n)$ en fonction de la décomposition en facteurs premiers de n.
2. En déduire que τ et S sont des fonctions multiplicatives :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, n \wedge m = 1 \implies \tau(nm) = \tau(n)\tau(m) \text{ et } S(nm) = S(n)S(m).$$

3. Montrer que $\tau(n)$ est impair ssi n est un carré parfait.
4. On note $P(n)$ le produit des diviseurs de n. Exprimer $P(n)$ en fonction de n et $\tau(n)$.

Exercice 33. ●◐○ *Nombres de la forme* $a^n \pm 1$
Soient $a, n \geq 2$.

1. Montrer que si $a^n + 1$ est premier, alors a est pair et n est une puissance de 2.
2. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors n est premier et $a = 2$.

EXERCICE 34. ♣ – ●◐○ *Formule de Legendre*

1. Soit $p \in \mathbb{P}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.
2. En déduire que si $m, n \in \mathbb{N}$, alors $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 35. ♣ – ●●○ *Nombres de Fermat*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$ le n-ème nombre de Fermat.

1. Montrer que si $n \neq m$, alors $F_n \wedge F_m = 1$.
   En déduire une nouvelle preuve de l'infinité des nombres premiers.
2. Montrer que tout facteur premier de F_n est congru à 1 modulo 2^{n+1}.

EXERCICE 36. ♣/♢ – ●●○ *Théorème de Wilson*
Montrer que $n \geq 2$ est premier ssi $(n-1)! \equiv -1\,[n]$.

EXERCICE 37. ♣ – ●●○ *Premiers congrus à* 1 *modulo* 4
Soit p un nombre premier impair.

1. On suppose que $x^2 = -1\,[p]$ admet une solution. Montrer que $p \equiv 1\,[4]$.
2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.
3. Réciproquement, si $p \equiv 1\,[4]$, montrer que $x = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$ vérifie $x^2 \equiv -1\,[4]$.

EXERCICE 38. ●●○ *Nombres de Carmichael*
Un entier n est un nombre de Carmichael s'il n'est pas premier et s'il vérifie la propriété (F) :

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a^n \equiv a\,[n].$$

1. Justifier que les nombres premiers vérifient la propriété (F).
2. Soit $n \geq 2$ sans facteur carré. Soit $m \geq 2$ tel que pour tout diviseur premier p de n, $p-1 \mid m-1$. Montrer que $a^m \equiv a\,[n]$, pour tout $a \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $n = p^2 m$, avec p premier et $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$(1+pm)^n \equiv 1\,[n].$$

4. En déduire qu'un entier n vérifie la propriété (F) ssi il est sans facteur carré et pour tout diviseur premier p de n, $p-1 \mid n-1$.
5. Montrer que 561 est un nombre de Carmichael.

EXERCICE 39. ●●○ *Valuation p-adique de* $\binom{p^n}{k}$

Soit $p \in \mathbb{P}$, soit $n \geq 1$, soit $k \in [\![1, p^n - 1]\!]$. Déterminer $v_p\left(\binom{p^n}{k}\right)$.

EXERCICE 40. ●●◐ *Diviseurs des nombres de la forme* $2^p - 1$
Soit p un nombre premier, soit k un diviseur positif de $2^p - 1$. Montrer que $k \equiv 1\,[2p]$.

EXERCICE 41. ♣/♢ – ●●◐ H_n *n'est pas un entier.*
Soit $n \geq 2$. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que H_n n'est pas entier.

EXERCICE 42. ♣ – ●●● *Minoration de Tchebychev*

1. Montrer que pour tout couple $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $a\binom{a+b}{b}$ divise $\bigvee_{1 \leq i \leq a} (b+i)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1) \bigvee_{0 \leq i \leq n} \binom{n}{i} = \bigvee_{1 \leq i \leq n+1} i$.
3. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\bigvee_{1 \leq i \leq n} i \geq 2^{n-1}$.
4. En déduire une minoration de $\pi_n = \left|\{p \leq n \mid p \text{ premier}\}\right|$.

Indications

Exercice 2. Reconnaître le quotient du produit de k entiers consécutifs par $k!$.

Exercice 10. Regarder modulo 10, puis modulo $100 = 25 \times 4$

Exercice 15. Pour 1., procéder par analogie avec la théorie des équations du second degré sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22. Raisonner par analyse-synthèse. Une condition évidente est $m \mid p$. Est-ce la seule ?

Exercice 24. Pour 2., modifier une relation de Bézout pour un tel k en remarquant que $ab + b(-a) = 0$

Exercice 27. Si $n = ab$, avec $a, b \geq 2$, que dire de a^{n-1} ?

Exercice 29. Raisonner par l'absurde. Si N est le produit de tous ces nombres premiers, considérer $4N - 1$.

Exercice 36. Pour $\Leftarrow$, raisonner par contraposée. Pour $\Rightarrow$, regrouper un entier et son inverse modulo n.

Exercice 41. Considérer la valuation dyadique du numérateur et dénominateur de H_n, écrit sous forme d'une fraction irréductible.