DM8B – Asymptotique de la série des inverses des premiers – Corrigé

1 Préliminaires analytiques

1. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Pour tout $t \in [k,k+1]$, on a $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$. Par propriété de croissance de l'intégrale, on a en intégrant entre k et $k+1$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

On somme ces inégalités pour k allant de 1 à $n-1$; par relation de Chasles, on a donc :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

L'inégalité de droite donne $\ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. En ajoutant 1 à l'inégalité de gauche (et après changement de variable), on a aussi $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n + 1$.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout $k \in \{2,\dots,n\}$, on a

$$\int_{k-1}^{k} \ln t \,\mathrm{d}t \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t \,\mathrm{d}t,$$

car la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

En sommant les premières inégalités pour k allant de 2 à n, on obtient

$$\sum_{k=2}^{n} \ln k \geq \int_1^n \ln t \,\mathrm{d}t.$$

D'autre part, en sommant les secondes inégalités pour k allant de 2 à $n-1$, on obtient

$$\sum_{k=2}^{n} \ln k \leq \ln n + \int_2^n \ln t \,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tous réels $0 < a \leq b$,

$$\int_a^b \ln t \,\mathrm{d}t = \big[t \ln t - t\big]_a^b = b\ln b - b - a\ln a + a.$$

En particulier,

$$\int_1^n \ln t \,\mathrm{d}t = n\ln n - n + 1$$

et

$$\int_2^n \ln t \, \mathrm{d}t = n\ln n - n - 2\ln 2 + 2.$$

Finalement,

$$n\ln n - n + 1 \leq \sum_{k=2}^{n} \ln k \leq (n+1)\ln n - n + 2 - 2\ln 2.$$

En particulier, puisque $2\ln 2 > 1$, on obtient

$$\boxed{n\ln n - n \leq \sum_{k=1}^{n} \ln k = \sum_{k=2}^{n} \ln k \leq n\ln n - n + \ln n + 1.}$$

En passant à l'exponentielle, qui est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$e^{n\ln n - n} \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln k\right) \leq e^{n\ln n - n + \ln n + 1}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n.}$$

2 Minoration

3. Notons $p_1, \ldots, p_k$ les diviseurs premiers distincts de m ayant une valuation impaire dans m. Comme les p_i sont deux à deux premiers entre eux, $p_1 \ldots p_k$ divise m. Par construction, $\dfrac{m}{p_1 \ldots p_k}$ s'écrit $\prod_{i=1}^{s} q_i^{\alpha_i}$, où les q_i sont des nombres premiers distincts (non nécessairement distincts des p_i) et les α_i sont pairs. On note alors $r = \prod_{i=1}^{s} q_i^{\alpha_i/2}$. Alors, r est un entier et $m = r^2 p_1 \ldots p_k$.
Les p_i sont supérieurs à 1 donc $m \geq r^2$ et $r \leq \sqrt{m}$, donc $r \leq \lfloor \sqrt{m} \rfloor$. De plus, chaque p_i est inférieur à m, donc est dans $\mathbb{P}_m$.

4. Le produit $\prod_{p \in \mathbb{P}_n} \left(1 + \dfrac{1}{p}\right)$ se développe en une somme de termes de la forme $\dfrac{1}{p_1 \ldots p_k}$ où les p_i sont des premiers distincts dans $\mathbb{P}_n$. Si $m \in [\![1, n]\!]$, on peut écrire $m = r^2 p_1 \ldots p_k$ où $r \leq \lfloor \sqrt{m} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ et où chaque p_i est dans $\mathbb{P}_m \subset \mathbb{P}_n$. Donc, $\dfrac{1}{m}$ se retrouve dans un des termes du membre de droite $\sum_{r=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \dfrac{1}{r^2} \left(\prod_{p \in \mathbb{P}_n} \left(1 + \dfrac{1}{p}\right) \right)$, une fois développé.
Donc, la somme des $\dfrac{1}{m}$, pour $m \in [\![1, n]\!]$ est inférieure à la somme de droite (car tous ses termes sont positifs). Ainsi,

$$H_n \leq \sum_{r=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{r^2} \left(\prod_{p \in \mathbb{P}_n} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \right).$$

5. Soit $N \geq 1$. Pour tout $r \in [\![2, N]\!]$, on a $\dfrac{1}{r^2} \leq \dfrac{1}{r(r-1)}$. On somme ces inégalités :

$$\sum_{r=2}^{N} \frac{1}{r^2} \leq \sum_{r=2}^{N} \frac{1}{r(r-1)} = \sum_{r=2}^{N} \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{N}.$$

En ajoutant le terme pour $r = 1$, on obtient $\displaystyle\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{r^2} \leq 2 - \frac{1}{N} \leq 2$.

6. On sait que pour tout réel x, on a $e^x \geq 1 + x$. Donc, par produit de quantités positives,

$$\prod_{p \in \mathbb{P}_n} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \leq \prod_{p \in \mathbb{P}_n} e^{1/p} = e^{A_n}.$$

Par la question 5, on a donc $H_n \leq e^{A_n} \displaystyle\sum_{r=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{r^2}$ et par la question 6, ceci est inférieur à $2e^{A_n}$.

Donc, $e^{A_n} \geq \dfrac{1}{2} H_n$.

3 Majoration

7. Un entier m est dans l'image de f_i ssi il s'écrit comme produit d'exactement i nombres premiers (non nécessairement distincts) dans $\mathbb{P}_n$ (par définition). Soit m un tel entier dans l'image ; on peut donc l'écrire $m = p_1 \dots p_i$, où les p_k sont dans $\mathbb{P}_n$.
Si m s'écrit aussi $q_1 \dots q_i$, avec des q_k dans $\mathbb{P}_n$, alors le i-uplet $(p_1, \dots, p_i)$ est égal au i-uplet $(q_1, \dots, q_i)$ à permutation près des termes ; c'est en effet une conséquence de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers de m. Comme il y a au maximum $i!$ tels i-uplets permutés (*au maximum, car certains peuvent être identiques si les p_k ne sont pas deux à deux distincts*), m admet au plus $i!$ antécédents.

8. Pour tout entier $m \geq 2$, on a montré que

$$\left(\frac{m}{e}\right)^m \leq m! \leq em\left(\frac{m}{e}\right)^m.$$

En élevant cet encadrement à la puissance $1/m$, on obtient

$$\frac{m}{e} \leq (m!)^{1/m} \leq (em)^{1/m} \frac{m}{e}.$$

Or,

$$(em)^{1/m} = \exp\left(\frac{1 + \ln m}{m}\right) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 1.$$

Par encadrement, on en déduit que

$$\boxed{(m!)^{1/m} \underset{m \to +\infty}{\sim} \frac{m}{e}.}$$

9. En particulier, comme

$$k_n = \lfloor \ln(\ln n) \rfloor \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty,$$

on a

$$\boxed{(k_n!)^{1/k_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{k_n}{e} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln(\ln n)}{e},}$$

car $\lfloor x \rfloor \sim x$ lorsque $x \to +\infty$.

10. Pour n suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned}\ln(1+k_n\ln n) &= \ln\left(k_n\ln n\left(1+\frac{1}{k_n\ln n}\right)\right)\\ &= \ln k_n + \ln(\ln n) + \ln\left(1+\frac{1}{k_n\ln n}\right).\end{aligned}$$

Le troisième terme tend vers 0, tandis que le premier est négligeable devant le deuxième, puisque $k_n = o(\ln n)$. Ainsi,

$$\ln(1+k_n\ln n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln n) \underset{n\to+\infty}{\sim} k_n.$$

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+k_n\ln n)}{k_n} = 1.}$$

3.1 Conclusion

11. D'après la question 6, pour tout $n \geq 2$,

$$e^{A_n} \geq \frac{H_n}{2}.$$

Ainsi, d'après la question 1,

$$A_n \geq \ln H_n - \ln 2 \geq \ln(\ln n) - \ln 2.$$

D'autre part, d'après la question 8, pour n suffisamment grand, en choisissant $k = k_n = \lfloor \ln(\ln n) \rfloor$, on obtient

$$A_n \leq (k_n!)^{1/k_n}(1+k_n\ln n)^{1/k_n}.$$

Or, d'après les questions 9 et 10,

$$(k_n!)^{1/k_n} \sim \frac{\ln(\ln n)}{e}$$

et

$$(1+k_n\ln n)^{1/k_n} = \exp\left(\frac{\ln(1+k_n\ln n)}{k_n}\right) \longrightarrow e.$$

On en déduit que

$$(k_n!)^{1/k_n}(1+k_n\ln n)^{1/k_n} \sim \ln(\ln n).$$

Finalement, pour n suffisamment grand,

$$1 - \frac{\ln 2}{\ln(\ln n)} \leq \frac{A_n}{\ln(\ln n)} \leq \frac{(k_n!)^{1/k_n}(1+k_n\ln n)^{1/k_n}}{\ln(\ln n)}.$$

Les deux membres extrêmes tendent vers 1. D'après le théorème d'encadrement,

$$\boxed{A_n = \sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{1}{p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln n).}$$