DM 1 - Modes de raisonnement

Exercice 1. – *Théorème de Zeckendorf*

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.
Le but de l'exercice est de montrer le théorème de Zeckendorf :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique entier $N \in \mathbb{N}^*$ et des entiers uniques $k_1, \dots, k_N \geq 2$ tels que :

- $\forall i \in [\![1, N-1]\!], k_{i+1} \geq k_i + 2$;
- $n = F_{k_N} + F_{k_{N-1}} + \cdots + F_{k_1}$.

On appellera *décomposition de Zeckendorf* de n cette écriture.

1. Déterminer la décomposition de Zeckendorf de 17 et de 52.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier$k > 2 tel que F_k \leq n < F_{k+1}$.
3. Démontrer que tout entier n non nul admet une décomposition de Zeckendorf.
4. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$,
$$F_{2n} - 1 = F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} \text{ et } F_{2n+1} - 1 = F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n}.$$
5. En déduire, pour tout $n \geq 1$, l'unicité de la décomposition de Zeckendorf de n.

Exercice 2. – *Vrai/Faux*

On justifiera les réponses.

1. Si f et g sont deux fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors fg est une fonction croissante.
2. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, dont l'un au moins n'est pas réel. On suppose que $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ sont réels. Alors, z_1 et z_2 sont conjugués.
3. Si n est un entier naturel impair, alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.
4. Si x est un nombre réel tel que $x^2 \geq 9$, alors $x \geq 3$.

Exercice 3. – $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$

Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Exercice 4. – *Tâche de sélection de Wason*

On dispose de 4 cartes affichant une lettre sur une face et un chiffre sur l'autre. Une seule face de chaque carte est visible et les faces visibles sont D ; 7 ; 5 ; K. Quelles cartes est-il nécessaire et suffisant de retourner pour vérifier la véracité de l'affirmation suivante :
Si une carte a un D sur une face, alors elle porte un 5 *sur l'autre face.*