DM 1 - Modes de raisonnement

Exercice 1. – *Décomposition de Zeckendorf*

1. On commence par calculer les termes de la suite de Fibonacci : $F_0 = 0$; $F_1 = 1$; $F_2 = 1$; $F_3 = 2$; $F_4 = 3$; $F_5 = 5$; $F_6 = 8$; $F_7 = 13$; $F_8 = 21$; $F_9 = 34$.

   On trouve que $17 = 13+3+1 = F_7 + F_4 + F_2$ et $52 = 34+13+5 = F_9 + F_7 + F_5$.

2. Par une récurrence double immédiate, on montre que la suite de Fibonacci prend des valeurs entières positives. Alors, pour tout $n \geq 1$, $F_{n+1} - F_n = F_{n-1} \geq 0$, donc la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

   Comme $F_1 = 1$, on a donc : $\forall n \geq 1, F_n \geq 1$. On peut alors être plus précis. Soit $n \geq 2$. On a $F_{n+1} - F_n = F_{n-1} \geq 1$. Donc, la suite $(F_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante. Comme elle est à valeurs entières, on en déduit, par une récurrence simple immédiate, que :

   $$\forall n \geq 2, F_n \geq n-1.$$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $A = \{k \in \mathbb{N} \mid F_k \leq n\}$ est donc une partie finie de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un plus grand élément qu'on note k. Alors $F_k \leq n$ par définition et $F_{k+1} > n$ puisque $k+1 \notin A$. On a donc bien

   $$F_k \leq n < F_{k+1}.$$

   De plus, k n'est pas égal à 0 ou 1 : sinon on aurait $F_{k+1} = 1$ et donc $n = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

3. On procède par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$. La propriété de récurrence est l'existence d'une décomposition de Zeckendorf pour l'entier n.

   Initialisation : pour $n = 1$, on constate que $1 = F_2$ est une décomposition de Zeckendorf.

   Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que tout entier $k \in [\![1, n]\!]$ admette une décomposition de Zeckendorf. Par la question précédente, on peut trouver $k \geq 2$ tel que $F_k \leq n+1 < F_{k+1}$.

   Si on a égalité $n+1 = F_k$, c'est une décomposition de Zeckendorf de $n+1$. Sinon, on pose $m = (n+1) - F_k$. Comme $m \in [\![1, n]\!]$, il admet une décomposition de Zeckendorf (qu'on fixe une fois pour toutes). De plus, $m < F_{k+1} - F_k = F_{k-1}$, donc le plus grand terme dans la décomposition de Zeckendorf de m est au plus d'indice $k-2$. Ainsi, la décomposition de Zeckendorf de m, augmentée de F_k, est une décomposition de Zeckendorf de $n+1$.

   Ceci achève la récurrence : tout entier $n \geq 1$ admet une décomposition de Zeckendorf.

4. On va distinguer les n pairs et impairs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété :

   $$F_{2n} - 1 = \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ impair}}}^{2n-1} F_k \text{ et } F_{2n+1} - 1 = \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{2n} F_k.$$

   On montre que pour tout $n \geq 1$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, par récurrence sur n.

Initialisation : $F_2 - 1 = 0$, qui est bien égal à la somme vide et $F_3 - 1 = 2 - 1 = 1 = F_2$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors,

$$F_{2n+2} = F_{2n} + F_{2n+1} = \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ impair}}}^{2n-1} F_k + F_{2n+1} = \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} F_k.$$

$$F_{2n+3} = F_{2n+1} + F_{2n+2} = \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{2n} F_k + F_{2n+2} = \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{2n+2} F_k.$$

Ceci montre bien $\mathscr{P}(n+1)$ et conclut la récurrence.

Or, la question revient à démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Ceci est donc démontré.

5. On procède par récurrence forte, en notant, pour $n \geq 1$, $\mathscr{P}(n)$ la propriété stipulant l'unicité de la décomposition de Zeckendorf de n.

   Initialisation : comme pour tout $n \geq 3$, $F_n \geq 2$, seul F_2 peut apparaître dans une décomposition de Zeckendorf de 1. Donc $1 = F_2$ est la seule décomposition de Zeckendorf de 1.

   Hérédité : soit $n \geq 1$ un entier tel que $\mathscr{P}(k)$ est vrai pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Considérons deux décompositions de Zeckendorf de $n+1$:

$$n+1 = \sum_{i=1}^{N} F_{k_i} = \sum_{j=1}^{M} F_{l_j},$$

   où $\forall i \in [\![1, N-1]\!], F_{k_{i+1}} \geq F_{k_i} + 2$ et $\forall j \in [\![1, M-1]\!], F_{l_{j+1}} \geq F_{l_j}$.

   Si on parvient à montrer que $k_N = l_M$, on pourra soustraire le terme $F_{k_N} = F_{l_M}$ à $n+1$ et obtenir deux décompositions de Zeckendorf de $n+1-F_{k_N}$. L'hypothèse de récurrence permettra alors de conclure.

   Tout revient donc à montrer que $k_N = l_M$. Supposons par l'absurde qu'ils soient distincts. Par symétrie, on peut supposer que $k_N > l_M$ et donc $F_{k_N} \geq F_{l_M+1}$. Considérons la somme $\sum_{j=1}^{M} F_{l_j}$. Comme deux indices successifs de cette somme ne sont pas consécutifs et comme la suite de Fibonacci est croissante, on en déduit $F_{l_{M-1}} \leq F_{l_M-2}$, puis $F_{l_{M-2}} \leq F_{l_M-4}$, etc. Par une récurrence finie immédiate, on a :

$$\forall j \in [\![1, M-1]\!], F_{l_{M-j}} \leq F_{l_M-2j}.$$

   Ainsi, $\sum_{j=1}^{M} F_{l_j} \leq \sum_{j=0}^{M-1} F_{l_M-2j}$. Or, cette dernière somme est inférieure à

$$\sum_{\substack{k=2 \\ k \equiv l_M [2]}}^{l_M} F_k = F_{l_M+1} - 1,$$

   d'après la question précédente. D'où les inégalités :

$$F_{l_M+1} \leq F_{k_N} \leq \sum_{i=1}^{N} F_{k_i} = \sum_{j=1}^{M} F_{l_j} \leq F_{l_M+1} - 1.$$

C'est absurde.

Ceci conclut la récurrence : tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ admet donc une unique décomposition de Zeckendorf (l'existence a été prouvée précédemment).

Exercice 2. – *Vrai/Faux*

1. C'est faux en général. Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) = x$ sont croissantes.
   Comme $-2 < 1$ et que $(fg)(-2) = 4 > (fg)(1) = 1$, la fonction fg n'est pas croissante.

2. C'est vrai. Notons $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ les écritures algébriques de z_1 et z_2. Comme $z_1 + z_2$ est réel, on a $y_1 + y_2 = 0$, donc $y_2 = -y_1$.
   On a alors $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_1) = x_1 x_2 - y_1^2 + iy_1(x_2 - x_1)$. Comme $z_1 z_2$ est réel, on a $y_1(x_2 - x_1)$. De plus, $y_1 \neq 0$. En effet, sinon on aurait aussi $y_2 = 0$ (car $y_2 = -y_1$), contredisant le fait que l'un au moins des z_i n'est pas réel. Comme $y_1 \neq 0$, on a donc $x_2 - x_1 = 0$.
   Finalement, $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_1 - iy_1$: z_1 et z_2 sont conjugués.

3. C'est vrai. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier impair. On procède par disjonction de cas selon que n est congru à 1 ou 3 modulo 4.

   - Si $n \equiv 1\,[4]$, on écrit $n = 4k+1$, avec $k \in \mathbb{N}$. Alors $n^2 = 16k^2 + 8k + 1$, de sorte que $n^2 - 1 = 8(2k^2 + k)$ est divisible par 8.
   - Si $n \equiv 3\,[4]$, on écrit $n = 4k+3$, avec $k \in \mathbb{N}$. Alors $n^2 = 16k^2 + 24k + 9$, de sorte que $n^2 - 1 = 8(2k^2 + 3k + 1)$ est divisible par 8.

4. C'est faux. Il suffit de poser $x_0 = -4$. On a $x_0^2 = 16 \geq 9$, mais $x_0 < 3$.

Exercice 3. – $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$

On procède par analyse-synthèse.

- Analyse. Soit f une fonction vérifiant cette assertion. En prenant $x = y = 0$, on obtient : $f(0)^2 - f(0) = 0$. On a donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
  En prenant $x = 1$ et $y = 0$, on obtient $f(1)f(0) - f(0) = 1$; on ne peut donc pas avoir $f(0) = 0$. Donc, $f(0) = 1$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. En prenant ce x et $y = 0$ dans l'assertion vérifiée par f, on obtient

  $$f(x)f(0) - f(0) = x.$$

  Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + 1$.

- Synthèse. On note f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + 1$.
  Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On calcule

  $$f(x)f(y) - f(xy) = (x+1)(y+1) - (xy+1) = x + y.$$

  Ainsi, f est solution de l'équation fonctionnelle.

Ainsi, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$ est l'unique solution de l'équation fonctionnelle.

Exercice 4. – *Tâche de sélection de Wason*

L'affirmation est réfutée ssi on peut trouver une carte portant un D sur une face et un chiffre différent de 5 sur l'autre. Comme chaque carte affiche une lettre sur une face et un chiffre sur l'autre, les seules cartes pouvant réfuter l'affirmer sont donc celles affichant le D et le 7.
Il faut et il suffit donc de retourner les deux premières cartes.