DM 2 - Inversion de Pascal et transformation de Fourier discrète

Exercice 1. – *Formule d'inversion de Pascal*

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres. On définit sa *transformée binomiale* comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e_k$.

1. Soient $0 \leq k \leq n$ des entiers naturels. Calculer, selon les valeurs de k et de n, la quantité

$$\mu(k,n) = \sum_{q=0}^{n-k} (-1)^q \binom{n}{q}\binom{n-q}{k}.$$

2. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa transformée binomiale. Montrer la formule d'inversion de Pascal :

$$\forall n \in \mathbb{N}, e_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} f_p.$$

Exercice 2. – *Nombre de dérangements*

Soit E un ensemble. Une *permutation* de E est une fonction $f : E \to E$ tel que tout élément de E admet un unique antécédent par f :

$$\forall y \in E, \exists! x \in E : f(x) = y.$$

Une permutation de E est un *dérangement* si elle est sans point fixe :

$$\forall x \in E, f(x) \neq x.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n le nombre de dérangements de l'ensemble $[\![1, n]\!]$. On convient que $D_0 = 1$.

1. On admet que $\forall n \geq 1, D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$. En déduire que

$$\forall n \geq 1, D_n = nD_{n-1} + (-1)^n.$$

2. On note $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la transformée binomiale de $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Calculer les valeurs de D_n et T_n pour $n \in [\![0, 5]\!]$.

3. Conjecturer une formule pour T_n, puis la démontrer.

4. En déduire une formule pour D_n.

5. (Bonus) Si les n passagers d'un avion s'assoient au hasard sur les n sièges, quelle est la probabilité qu'aucun ne soit à la place indiquée sur son billet ? Pour $n = 500$, on réalisera en Python[1] une simulation de l'expérience et on comparera au résultat théorique.

[1] On pourra utiliser la méthode `shuffle` du module `random`.

Exercice 3. – *Transformation de Fourier discrète*

Soit $n \geq 1$ un entier. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $E = \mathbb{C}^n$. Si $\mathbf{a}$ est un élément quelconque de E, on note $a_0, \ldots, a_{n-1}$ ses n composantes.
Soit $\mathbf{a}$ dans E. On définit $\mathscr{F}\mathbf{a} \in E$ sa *transformée de Fourier discrète* par

$$\forall j \in [\![0, n-1]\!], (\mathscr{F}\mathbf{a})_j = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj} a_k.$$

On définit aussi $\overline{\mathscr{F}}\mathbf{a} \in E$ par $\forall j \in [\![0, n-1]\!], \left(\overline{\mathscr{F}}\mathbf{a}\right)_j = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-kj} a_k$.
On pourra librement utiliser l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$:

$$\forall z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}, \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

1. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.
2. En déduire que, pour tout $\mathbf{a} \in E$,
$$\mathscr{F}\left(\overline{\mathscr{F}}\mathbf{a}\right) = \overline{\mathscr{F}}\left(\mathscr{F}\mathbf{a}\right) = n\mathbf{a}.$$

Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme, de coefficients $a_k \in \mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$.
On note $M_P = \max\left\{|P(\omega^k)|, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.

3. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!], |a_k| \leq M_P$.

Si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$, le *produit de convolution* de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, noté $\mathbf{a} \star \mathbf{b}$, est défini par

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], (\mathbf{a} \star \mathbf{b})_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j b_{k-j},$$

les indices sur $\mathbf{b}$ étant à considérer modulo n : $\forall i \in [\![1-n, -1]\!], \mathbf{b}_{-i} = \mathbf{b}_{n-i}$.

4. Montrer que
$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in E, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \left(\mathscr{F}(\mathbf{a} \star \mathbf{b})\right)_k = (\mathscr{F}\mathbf{a})_k (\mathscr{F}\mathbf{b})_k.$$
5. En déduire – en limitant les calculs – que $\star$ est commutative et associative :
$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in E, \mathbf{a} \star \mathbf{b} = \mathbf{b} \star \mathbf{a} \text{ et } (\mathbf{a} \star \mathbf{b}) \star \mathbf{c} = \mathbf{a} \star (\mathbf{b} \star \mathbf{c}).$$

On considère $\mathbf{p}$ et ν deux éléments de E. On suppose que leurs composantes sont dans $\mathbb{R}_+$ et que $\sum_{k=0}^{n-1} p_k = \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k = 1$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note $\mathbf{p}^{(j)} = \nu \star \cdots \star \nu \star \mathbf{p}$, avec j facteurs ν. On dit que $\left(\mathbf{p}^{(j)}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ converge si pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, les suites $\left(p_k^{(j)}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ convergent.

6. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\mathscr{F}\nu$ pour que $\left(\mathbf{p}^{(j)}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ converge.