DM 2 - Formule d'inversion de Pascal et transformation de Fourier

Exercice 1. –

1. Soit $q \in [\![0, n-k]\!]$. On remarque que
$$\binom{n}{q}\binom{n-q}{k} = \frac{n!}{q!(n-q)!}\frac{(n-q)!}{k!(n-q-k)!} = \frac{n!}{q!k!(n-q-k)!} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{q}.$$
Ainsi,
$$\mu(k,n) = \sum_{q=0}^{n-k}(-1)^q\binom{n}{k}\binom{n-k}{q} = \binom{n}{k}(1+(-1))^{n-k}$$
par la formule du binôme de Newton.
On conclut que $\mu(k,n) = 0$ si $n > k$ et 1 si $n = k$.

2. On calcule le terme de droite.
$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}f_p &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}e_k\\ &= \sum_{k=0}^{n} e_k\sum_{p=k}^{n}(-1)^{n-p}\binom{p}{k}\binom{n}{p}\\ &= \sum_{k=0}^{n} e_k\sum_{q=0}^{n-k}(-1)^{q}\binom{n-q}{k}\binom{n}{n-q}\\ &= \sum_{k=0}^{n} e_k\sum_{q=0}^{n-k}(-1)^{q}\binom{n-q}{k}\binom{n}{q}\\ &= \sum_{k=0}^{n} e_k\times\mu(k,n)\\ \sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}f_p &= e_n.\end{aligned}$$
Pour le passage de la deuxième à la troisième ligne, on a fait le changement de variable $q = n-p$; pour le passage de la troisième à la quatrième, on a utilisé la formule de symétrie. On a bien montré :
$$\forall n \in \mathbb{N}, e_n = \sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}f_p.$$

Exercice 2. –

1. Soit $n \geq 1$. On calcule :
$$(D_n - nD_{n-1}) + (D_{n+1} - (n+1)D_n) = D_{n+1} - n(D_n + D_{n-1}) = 0.$$

En posant, pour tout $n \geq 1$, $E_n = D_n - nD_{n-1}$, on en déduit donc que $\forall n \geq 1, E_n = -E_{n+1}$ et donc, par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, E_n = (-1)^{n-1} E_1$.

Or, $E_1 = D_1 - D_0 = 0 - 1 = -1$ ($D_1 = 0$, car il n'y a pas de dérangement pour le singleton $\{1\}$). D'où,

$$\forall n \geq 1, E_n = (-1)^n,$$

c'est-à-dire $\forall n \geq 1, D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

2. En utilisant l'une ou l'autre des formules précédentes, on trouve

   - $D_0 = 1$
   - $D_1 = 0$
   - $D_2 = 1$
   - $D_3 = 2$
   - $D_4 = 9$
   - $D_5 = 44$

   Le calcul de T_n, pour $n \leq 5$ donne alors :

   - $T_0 = 1$
   - $T_1 = 1$
   - $T_2 = 2$
   - $T_3 = 6$
   - $T_4 = 24$
   - $T_5 = 120$

3. On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}, T_n = n!$. Montrons le en établissant une formule de récurrence pour $(T_n)_n$. Soit $n \geq 1$. On calcule :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k \\ &= \binom{n}{0} D_0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (kD_{k-1} + (-1)^k) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} D_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

La somme de droite vaut -1 car $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$ par la formule du binôme de Newton. Donc :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} D_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} D_{k-1} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} D_k \\ T_n &= nT_{n-1}. \end{aligned}$$

On a utilisé la formule du chef pour le passage de la première à la deuxième ligne, puis on a fait un changement de variable $l = k - 1$.

Comme par ailleurs $T_0 = 1$, une récurrence immédiate permet de conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = n!$$

4. En utilisant la formule d'inversion de Pascal, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, D_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} p!$$

Or, $\binom{n}{p} p! = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. En utilisant le changement de variable $k = n - p$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

5. Il y a $n!$ permutations pour l'ensemble $[\![1, n]\!]$. Le problème revient à choisir une permutation aléatoire de $[\![1, n]\!]$ et à considérer la probabilité qu'il s'agisse d'un dérangement. La probabilité recherchée est donc :

$$\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Consulter le fichier .py pour le code. Pour $n = 500$, la probabilité vaut environ 0.3679.

Remarque : on montrera que $\dfrac{D_n}{n!}$ tend (très vite) vers $1/e$.

Exercice 3. – *Transformation de Fourier discrète*

1. On commence par remarquer que $\omega^p = e^{\frac{2ip\pi}{n}}$. Ceci est égal à 1 ssi $\dfrac{p}{n}$ est un entier, c'est-à-dire si n divise p. Ainsi, si n divise p, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = n$.
Supposons maintenant que n ne divise pas p. Alors,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^p\right)^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0.$$

Bilan : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ vaut n si n divise p et 0 sinon.

2. Soit $\mathbf{a} \in E$. On souhaite calculer $\mathbf{b} = \mathscr{F}\left(\overline{\mathscr{F}}\mathbf{a}\right)$. Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_j &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj} \left(\overline{\mathscr{F}}\mathbf{a}\right)_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj} \sum_{\ell=0}^{n-1} \omega^{-\ell k} a_\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k(j-\ell)}\right) a_\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} n\delta_{j,\ell} a_\ell \\
\mathbf{b}_j &= n a_j.
\end{aligned}$$

On a noté $\delta_{j,\ell}$ la quantité valant 1 si $j = \ell$ et 0 sinon. On a utilisé la question précédente et le fait que, comme $\ell \in [\![0, n-1]\!]$, n divise $j - \ell$ ssi $j = \ell$.
D'où l'égalité $\mathscr{F}\left(\overline{\mathscr{F}}\mathbf{a}\right) = n\mathbf{a}$. L'autre égalité est analogue.

3. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Avec les notations précédentes, en notant $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{n-1})$, on a $P(\omega^k) = (\mathscr{F}\mathbf{a})_k$.
Par la formule $n\mathbf{a} = \overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\mathbf{a}$, on en déduit :
$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{-kj}P(\omega^j).$$
Par inégalité triangulaire :
$$|a_k| \leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}|\omega^{-kj}P(\omega^j)| = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}|P(\omega^j)| \leq \frac{1}{n} \times nM_P = M_P.$$

4. Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans E. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a :
$$\begin{aligned}
\Big(\mathscr{F}(\mathbf{a}\star\mathbf{b})\Big)_k &= \sum_{j=0}^{n-1}\omega^{jk}(\mathbf{a}\star\mathbf{b})_j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\omega^{jk}\sum_{\ell=0}^{n-1}\mathbf{a}_\ell\mathbf{b}_{j-\ell} \quad \text{en considérant les indices sur } \mathbf{b} \text{ modulo } n \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1}\mathbf{a}_l\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{jk}\mathbf{b}_{j-\ell} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1}\mathbf{a}_\ell\omega^{\ell k}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{(j-\ell)k}\mathbf{b}_{j-\ell} \quad \text{car } \omega^{jk} = \omega^{\ell k}\times\omega^{(j-\ell)k} \\
&= \Big(\sum_{\ell=0}^{n-1}\mathbf{a}_\ell\omega^{\ell k}\Big)\Big(\sum_{j'=-\ell}^{n-1-\ell}\omega^{j'k}\mathbf{b}_{j'}\Big) \quad \text{par changement de variable } j' = j-\ell \\
\Big(\mathscr{F}(\mathbf{a}\star\mathbf{b})\Big)_k &= \Big(\mathscr{F}\mathbf{a}\Big)_k\Big(\mathscr{F}\mathbf{b}\Big)_k.
\end{aligned}$$
Pour justifier la dernière étape, il faut se convaincre de l'égalité
$$\sum_{j'=-\ell}^{n-1-\ell}\omega^{j'k}\mathbf{b}_{j'} = \Big(\mathscr{F}\mathbf{b}\Big)_k.$$
Cela provient de l'invariance de la quantité $\omega^{j'k}\mathbf{b}_{j'}$ quand on translate l'indice j' de n. Plus

précisément :

$$\begin{aligned}
\sum_{j'=-\ell}^{n-1-\ell} \omega^{j'k}\mathbf{b}_{j'} &= \sum_{j'=-\ell}^{-1} \omega^{j'k}\mathbf{b}_{j'} + \sum_{j'=0}^{n-1-\ell} \omega^{j'k}\mathbf{b}_{j'} \\
&= \sum_{j'=0}^{n-1-\ell} \omega^{j'k}\mathbf{b}_{j'} + \sum_{j=n-\ell}^{n-1} \omega^{(j-n)k}\mathbf{b}_{j-n} \quad \text{par changement de variable } j = j'+n \\
&= \sum_{j'=0}^{n-1-\ell} \omega^{j'k}\mathbf{b}_{j'} + \sum_{j=n-\ell}^{n-1} \omega^{jk}\mathbf{b}_{j} \quad \text{car } \omega^{nk}=1 \text{ et } \mathbf{b}_{j-n}=\mathbf{b}_j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk}\mathbf{b}_j \\
&= \left(\mathscr{F}\mathbf{b}\right)_k.
\end{aligned}$$

5. Soient $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in E$. Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, on a

$$\left(\mathscr{F}(\mathbf{a}\star\mathbf{b})\right)_k = \left(\mathscr{F}\mathbf{a}\right)_k\left(\mathscr{F}\mathbf{b}\right)_k = \left(\mathscr{F}\mathbf{b}\right)_k\left(\mathscr{F}\mathbf{a}\right)_k = \left(\mathscr{F}(\mathbf{b}\star\mathbf{a})\right)_k.$$

En appliquant $\overline{\mathscr{F}}$ aux deux membres, on a donc :

$$n\,\mathbf{a}\star\mathbf{b} = \overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}(\mathbf{a}\star\mathbf{b}) = \overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}(\mathbf{b}\star\mathbf{a}) = n\,\mathbf{b}\star\mathbf{a},$$

d'où la commutativité de $\star$.
De même, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$:

$$\left(\mathscr{F}\left((\mathbf{a}\star\mathbf{b})\mathbf{c}\right)\right)_k = \left(\mathscr{F}(\mathbf{a}\star\mathbf{b})\right)_k\left(\mathscr{F}\mathbf{c}\right)_k = \left(\mathscr{F}\mathbf{a}\right)_k\left(\mathscr{F}\mathbf{b}\right)_k\left(\mathscr{F}\mathbf{c}\right)_k.$$

Le calcul de $\left(\mathscr{F}\left(\mathbf{a}\star(\mathbf{b}\star\mathbf{c})\right)\right)_k$ donne la même chose. En appliquant $\overline{\mathscr{F}}$ aux deux membres et en divisant par n, on obtient $(\mathbf{a}\star\mathbf{b})\star\mathbf{c} = \mathbf{a}\star(\mathbf{b}\star\mathbf{c})$. D'où l'associativité de $\star$.

6. On raisonne par Analyse-Synthèse.

- **Analyse.** On suppose que $\left(\mathbf{p}^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ converge. Ainsi, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, les suites $\left(p_k^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ convergent. Or, pour tout $j\in\mathbb{N}$ et tout $\ell\in[\![0,n-1]\!]$,

$$\left(\mathscr{F}\mathbf{p}^{(j)}\right)_\ell = \sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kl}p_k^{(j)}.$$

Par opérations élémentaires sur les limites (ω^{kl} ne dépend pas de j !), pour tout $\ell\in[\![0,n-1]\!]$, la suite (dépendant de l'indice $j\in\mathbb{N}$) de terme général $\left(\mathscr{F}\mathbf{p}^{(j)}\right)_\ell$ converge, quand j tend vers $+\infty$.
Fixons $\ell\in[\![0,n-1]\!]$ et $j\in\mathbb{N}$. Alors, par application répétée de la question 4,

$$\left(\mathscr{F}\mathbf{p}^{(j)}\right)_\ell = \left(\mathscr{F}\nu\right)_\ell^j\left(\mathscr{F}\mathbf{p}\right)_\ell.$$

La définition de $\mathscr{F}\nu$ et l'inégalité triangulaire montre immédiatement que $\left|\left(\mathscr{F}\nu\right)\right|_\ell \leq 1$.
Ainsi, cette suite $\left(\mathscr{F}\mathbf{p}^{(j)}\right)_\ell$ (d'indice $j\in\mathbb{N}$, ℓ étant fixé) converge si $\left(\mathscr{F}\mathbf{p}\right)_\ell = 0$ ou si $\left|\left(\mathscr{F}\nu\right)_\ell\right| < 1$ ou si $\left(\mathscr{F}\nu\right)_\ell = 1$.

- **Synthèse.** On suppose que pour $\ell \in [\![0, n-1]\!]$, la condition précédente est vérifiée : $\left(\mathscr{F}\mathbf{p}\right)_\ell = 0$ ou $\left|\left(\mathscr{F}\nu\right)_\ell\right| < 1$ ou $\left(\mathscr{F}\nu\right)_\ell = 1$.
  Alors, le calcul précédent monter que la suite de terme $\left(\mathscr{F}\mathbf{p}^{(j)}\right)_\ell$ (d'indice $j \in \mathbb{N}$) converge, pour tout $\ell \in [\![0, n-1]\!]$. En appliquant $\overline{\mathscr{F}}$, un argument similaire à celui de l'analyse montre alors que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la suite de terme $\left(n\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\mathbf{p}^{(j)}\right)_k = n\mathbf{p}_k^{(j)}$ converge. Cela revient à dire que $\left(\mathbf{p}^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ converge.

Bilan : on a convergence de $\left(\mathbf{p}^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ ssi, pour tout $\ell \in [\![0, n-1]\!]$, $\left(\mathscr{F}\mathbf{p}\right)_\ell = 0$ ou $\left|\left(\mathscr{F}\nu\right)_\ell\right| < 1$ ou $\left(\mathscr{F}\nu\right)_\ell = 1$.

Remarques :

- On aurait pu raisonner par équivalences sur la dernière question. Le point essentiel est qu'il y a convergence de $\mathbf{p}^{(j)}$ ssi sa transformée de Fourier converge. C'est une équivalence grâce à la formule d'inversion $\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\mathbf{a} = n\mathbf{a}$.
- Dans le cas générique (en un sens à préciser) où pour tout $\ell \in [\![0, n-1]\!]$, $\left(\mathscr{F}\mathbf{p}\right)_\ell \neq 0$, la condition revient à demander que pour tout $\ell \in [\![0, n-1]\!]$, $\left(\mathscr{F}\nu\right)_\ell \notin \mathbb{U} - \{1\}$. En effet, on a vu que $\left(\mathscr{F}\nu\right)_\ell$ est de module inférieur ou égal à 1.
- Cet énoncé modélise une situation en probabilités. La question est de savoir quand converge la distribution d'une particule se déplaçant dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ selon une certaine marche aléatoire.