DM 4 - Inégalité isopérimétrique

Soit $n \geq 3$ un entier ; on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On appelle *polygone à n côtés* un élément $Z = (z_0, \dots, z_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$. Pour simplifier les notations, on convient que $z_n = z_0$. Le polygone Z est dit *équilatéral* si la quantité $|z_{k+1} - z_k|$ ne dépend pas de $k \in [\![0, n-1]\!]$, *régulier* s'il existe une similitude (directe) f telle que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $z_k = f(\omega^k)$.

On dit que Z est *non réduit à un point* s'il existe deux indices $i, j \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $z_i \neq z_j$. Le *polygone conjugué* de Z est le polygone $\overline{Z} = (\overline{z_0}, \dots, \overline{z_{n-1}})$. On définit les nombres complexes $\hat{z}_j$, pour $j \in [\![0, n-1]\!]$ par :

$$\hat{z}_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (\overline{\omega}^j)^k z_k.$$

On associe à un polygone Z les trois quantités suivantes :

$$L(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \text{ ; } E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|^2 \text{ et } A(Z) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1} \overline{z_k} \right).$$

Le but du problème est de montrer l'inégalité isopérimétrique pour les polygones :

$$\frac{|A(Z)|}{L(Z)^2} \leq \frac{1}{4n \tan(\pi/n)},$$

si Z est non réduit à un point, l'égalité ayant lieu si, et seulement si, Z ou $\overline{Z}$ est régulier.

Questions préliminaires

1. Soient A et B deux points distincts du plan. Soit Δ une parallèle à la droite (AB), distincte de (AB).

   Montrer que l'aire du triangle ABM ne dépend pas du point M, choisi sur Δ.

   Montrer que la quantité $AM + BM$ est minimale – quand M est sur Δ – si M est à égale distance de A et B.

2. Soient A et B deux points du plan, d'affixe a et b. Montrer que l'aire algébrique du triangle OAB est égale à $\dfrac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{a}b)$.

   L'aire algébrique de OAB est par définition égale à son aire absolue si OAB est direct, à l'opposé de son aire absolue si OAB est indirect.

3. Soit $Z = (z_0, \dots, z_{n-1})$ un polygone, $c \in \mathbb{C}$. On définit le polygone translaté $Z + c$ par $Z + c = (z_0 + c, \dots, z_{n-1} + c)$. Montrer que $A(Z + c) = A(Z)$.

4. En déduire une interprétation de $A(Z)$.

   On se contentera d'un argument géométrique, sans trop insister sur les problèmes liés à l'orientation.

   Donner de même une interprétation de $L(Z)$.

5. Déterminer la valeur des rapports $\dfrac{A(Z)}{L(Z)^2}$, $\dfrac{A(Z)}{E(Z)}$ et $\dfrac{L(Z)^2}{E(Z)}$, si Z est un polygone régulier.

6. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k$.

7. En déduire que, si $Z = (z_0, \ldots, z_{n-1})$ est un polygone, alors

$$\forall j \in [\![0, n-1]\!], z_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^j)^k \hat{z}_k.$$

Rapport $A(Z)/E(Z)$

8. Montrer les égalités

$$A(Z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) |\hat{z}_k|^2 \text{ et } E(Z) = 4 \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) |\hat{z}_k|^2.$$

9. En déduire que $E(Z) - 4\tan(\frac{\pi}{n})A(Z)$ est égal à :

$$4 \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \left(\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) |\hat{z}_k|^2.$$

   Puis en déduire la majoration $\dfrac{|A(Z)|}{E(Z)} \leq \dfrac{1}{4\tan(\pi/n)}$, si Z n'est pas réduit à un point.

10. Déterminer à quelle condition sur Z l'inégalité de la question précédente est une égalité.

Rapport $A(Z)/L(Z)^2$

On admet qu'il existe un polygone Z_0 tel que, pour tout polygone Z non réduit à un point

$$\frac{A(Z)}{L(Z)^2} \leq \frac{A(Z_0)}{L(Z_0)^2}.$$

On note α le rapport $\dfrac{A(Z_0)}{L(Z_0)^2}$.

11. Soit Z un polygone non réduit à un point tel que $\dfrac{A(Z)}{L(Z)^2} = \alpha$. Montrer que Z est un polygone équilatéral.

    On pourra utiliser la question 1 et, afin de montrer l'égalité $|z_k - z_{k-1}| = |z_{k+1} - z_k|$, déplacer z_k parallèlement à $z_{k+1} - z_{k-1}$.

12. En déduire que si $\dfrac{A(Z)}{L(Z)^2} = \alpha$, alors Z ou $\overline{Z}$ est régulier. Conclure.