# 3 - Nombres complexes et trigonométrie

Jeremy Daniel

Itaque elegans et mirabile effugium reperit in illo analyseos miraculo, idealis mondi monstro, pene inter Ens et non Ens amphibium quo radicem imaginariam apellamus. [1]

Leibniz,1702

In pursuance of this decision, when the two brothers, talking university shop, had used *trig* several times, Martin Eden demanded :
'What is *trig* ?'
'Trigonometry' Norman said ; 'a higher form of math.'

Jack London, *Martin Eden*

## 1 Le corps des nombres complexes

### 1.1 Construction

Définition 1.1 (Lois de composition interne sur $\mathbb{R}^2$)
On définit deux opérations (lois de composition interne) $+$ et $\times$ sur $\mathbb{R}^2$, par les formules suivantes : $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$,

- $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ ;
- $(a,b)\times(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$.

1. Ainsi on trouve l'élégante et admirable issue dans ce miracle de l'analyse, monstre du monde des idées, presque amphibie entre l'être et le non-être, que nous appelons racine imaginaire.

Notation 1.2
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni de ces deux lois de composition interne et on désigne par $i$ l'élément $(0, 1)$.

**Proposition 1.3** (Compatibilité des opérations)
*Pour tous réels $x$ et $y$, on a*

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \text{ et } (x, 0) \times (y, 0) = (xy, 0).$$

Remarque 1.4
Ceci permet d'identifier un réel $x$ avec le couple $(x, 0)$ de $\mathbb{C}$, ces identifications étant compatibles avec les opérations définies sur $\mathbb{C}$. Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit alors de façon unique sous la forme $x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.

Définition 1.5 (Partie réelle, partie imaginaire, écriture algébrique)
Soit $z$ un nombre complexe. Si $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on appelle $x$ la partie réelle de $\mathbb{Z}$ et $y$ la partie imaginaire de $z$. On note $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.
L'égalité $z = x + iy$ est l'écriture algébrique de $z$.

Remarque 1.6
Les nombres réels sont donc les nombres complexes de partie imaginaire nulle.

Définition 1.7 (Nombre imaginaire pur)
Un nombre imaginaire pur est un nombre complexe de partie réelle nulle.

**Théorème 1.8** ($\mathbb{C}$ est un corps)
*$\mathbb{C}$ est un corps. Cela signifie qu'il satisfait les propriétés suivantes :*

1. *Associativité de l'addition :*

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, z + (z' + z'') = (z + z') + z''.$$

2. *$0$ est élément neutre pour l'addition :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z.$$

3. *Existence d'un opposé pour l'addition :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists w \in \mathbb{C} : z + w = w + z = 0.$$

4. *Commutativité de l'addition :*

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, z + w = w + z.$$

5. *Associativité du produit :*

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, (zz')z'' = z(z'z'').$$

6. 1 *est élément neutre pour le produit :*
$$\forall z \in \mathbb{C}, 1 \times z = z \times 1 = z.$$
7. *Commutativité du produit :*
$$\forall z, w \in \mathbb{C}, zw = wz.$$
8. *Distributivité de* $\times$ *sur* $+$ *:*
$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, z(z' + z'') = zz' + zz''.$$
9. *Existence d'un inverse pour* $\times$*, pour tout élément non nul :*
$$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}, \exists w \in \mathbb{C} : zw = wz = 1.$$

## 1.2 Propriétés algébriques

**Proposition 1.9** (Linéarité des parties réelle et imaginaire)
*Soit* $(z_i)_{i \in I}$ *et* $(\lambda_i)_{i \in I}$ *des familles finies de nombres complexes et réels.*
$$\mathrm{Re}\Big(\sum_{i \in I} \lambda_i z_i\Big) = \sum_{i \in I} \lambda_i \mathrm{Re}(z_i) \text{ et } \mathrm{Im}\Big(\sum_{i \in I} \lambda_i z_i\Big) = \sum_{i \in I} \lambda_i \mathrm{Im}(z_i).$$

Définition 1.10 (Conjugué)
Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, avec $x$ et $y$ réels. Le conjugué de $z$ noté $\overline{z}$ est le nombre complexe $x - iy$.

Définition 1.11 (Module)
Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, avec $x$ et $y$ réels. Le module de $z$, noté $|z|$ est le nombre réel positif $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarque 1.12
Cette notation est compatible avec la valeur absolue pour les nombres réels.

**Proposition 1.13** (Conjugaison et module)
*Soient* $z$ *et* $w$ *deux nombres complexes.*
- $z$ *est réel ssi* $z = \overline{z}$.
- $z$ *est imaginaire pur ssi* $z = -\overline{z}$.
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ *et* $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.
- $|z| = 0$ *ssi* $z = 0$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ *et* $|zw| = |z||w|$.
- $z\overline{z} = |z|^2$

Remarque 1.14
Si $z \neq 0$, son inverse $z^{-1}$ est donc égal à $\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Notation 1.15 (Ensemble $\mathbb{U}$)
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

**Corollaire 1.16** (($\mathbb{U}, \times$) est un groupe)
*Soient $z, w \in \mathbb{U}$. Alors $zw \in \mathbb{U}$ et $z^{-1} \in \mathbb{U}$. De plus, $z^{-1} = \overline{z}$.*

Définition 1.17 (Nombres complexes positivement liés)
Soient $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes. On dit qu'ils sont positivement liés s'il existe $w \in \mathbb{C}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], z_i = \lambda_i w.$$

Remarque 1.18
Si $z_1$ est non nul, on peut prendre $w = z_1$ et $\lambda_i = \dfrac{z_i}{z_1}$.

**Lemme 1.19**
*Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w})$.*

**Théorème 1.20** (Inégalité triangulaire)
*Soient $z, w$ deux nombres complexes.*

$$|z + w| \leq |z| + |w|,$$

*avec égalité ssi $z$ et $w$ sont positivement liés.*
*Plus généralement, si $z_1, \dots, z_n$ sont des nombres complexes, on a*

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} z_k\Big| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|,$$

*avec égalité ssi les $z_k$ sont positivement liés.*

# 2 Trigonométrie

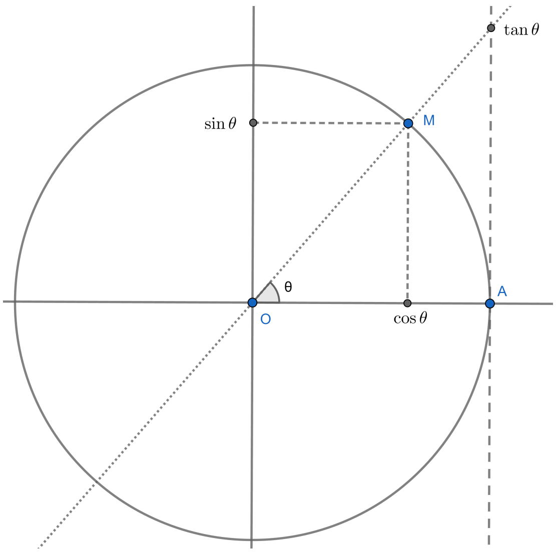
## 2.1 Cercle trigonométrique

Définition 2.1 (Cercle trigonométrique)
Dans le plan usuel, identifié à $\mathbb{R}^2$, on appelle cercle trigonométrique le cercle de centre $O = (0, 0)$ et de rayon 1.

Définition 2.2 (Congruence entre réels)
Soit $m$ un réel strictement positif. Deux nombres réels $x$ et $y$ sont congrus modulo $m$, ce qu'on note $x \equiv y\,[m]$, s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + km$.

Définition 2.3 (Cosinus, sinus, tangente d'un angle)
Notons $A$ le point $(1, 0)$. Soit $\theta$ un réel. On admet qu'il existe un unique point $M$ sur le cercle trigonométrique, tel que l'angle formé par les demi-droites $[OA)$ et $[OM)$ est $\theta$. Alors,

- le cosinus de $\theta$, noté $\cos\theta$, est l'abscisse de $M$ ;
- le sinus de $\theta$, noté $\sin\theta$, est l'ordonnée de $M$ ;
- la tangente de $\theta$, noté $\tan\theta$ est l'ordonnée du point d'intersection de la droite $(OM)$ et de la droite d'équation $x = 1$. (si $\theta$ n'est pas congru à $\pi/2$ modulo $\pi$)




Remarque 2.4
On définit aussi la cotangente de $\theta$, notée $\operatorname{cotan}\theta$, comme l'abscisse du point d'intersection de la droite $(OM)$ et de la droite d'équation $y = 1$. (si $\theta$ n'est pas congru à 0 modulo $\pi$)

Définition 2.5 (Fonctions trigonométriques)
On définit ainsi les fonctions cos et sin sur $\mathbb{R}$, tan sur $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et cotan sur $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

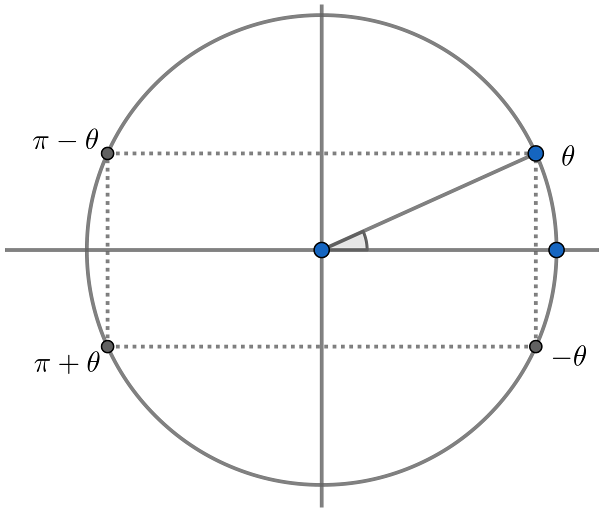
**Proposition 2.6** (Relations entre fonctions trigonométriques)
*Soit $\theta$ un réel.*

- *Si $\theta$ n'est pas congru à $\pi/2$ modulo $\pi$, alors* $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.
- *Si $\theta$ n'est pas congru à 0 modulo $\pi$, alors* $\operatorname{cotan}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

**Proposition 2.7** (Périodicités)
*Les fonctions* cos *et* sin *sont* $2\pi$*-périodiques. Sur leur ensemble de définition, les fonctions* tan *et* cotan *sont* $\pi$*-périodiques.*

**Proposition 2.8** (Angles $\pi \pm \theta$ et $-\theta$)
*Soit* $\theta$ *un réel.*

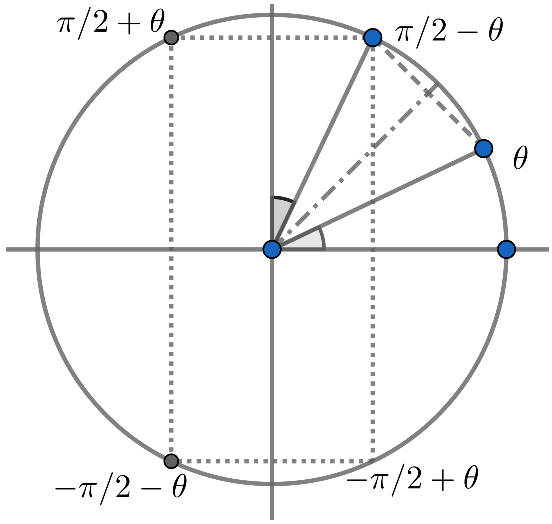
- $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ ; $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
- $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$ ; $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$
- $\cos(-\theta) = \cos\theta$ ; $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.




Remarque 2.9
En particulier, cos est une fonction paire et sin une fonction impaire. Par quotient, tan et cotan sont impaires.

**Proposition 2.10** (Angles $\pm\pi/2 \pm \theta$)
*Soit* $\theta$ *un réel.*

- $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta)$ ; $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta)$
- $\cos(\pi/2 + \theta) = -\sin(\theta)$ ; $\sin(\pi/2 + \theta) = \cos(\theta)$
- $\cos(-\pi/2 + \theta) = \sin(\theta)$ ; $\sin(-\pi/2 + \theta) = -\cos(\theta)$
- $\cos(-\pi/2 - \theta) = -\sin(\theta)$ ; $\sin(-\pi/2 - \theta) = -\cos(\theta)$.



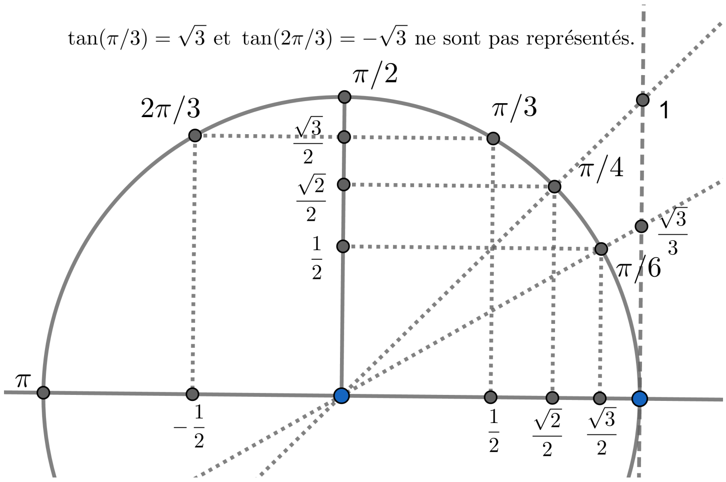

**Théorème 2.11** (Cas d'égalité)
*Soient $\theta$ et $\phi$ deux réels.*

- $\cos\theta = \cos\phi$ *ssi* $\theta \equiv \phi\,[2\pi]$ *ou* $\theta \equiv -\phi\,[2\pi]$ *;*
- $\sin\theta = \sin\phi$ *ssi* $\theta \equiv \phi\,[2\pi]$ *ou* $\theta \equiv \pi - \phi\,[2\pi]$ *;*
- $\tan\theta = \tan\phi$ *ssi* $\theta \equiv \phi\,[\pi]$.

Exercice 2.12
Pour quelles valeurs de $\theta$ a-t-on $\cos(\pi/6+\theta) = \sin(\pi/4-\theta)$ ?

**Proposition 2.13** (Valeurs remarquables)

| $\theta$ | $\cos\theta$ | $\sin\theta$ | $\tan\theta$ | $\mathrm{cotan}\,\theta$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $1$ | $0$ | $0$ | $\|\|$ |
| $\pi/2$ | $0$ | $1$ | $\|\|$ | $0$ |
| $\pi$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $\|\|$ |
| $\pi/6$ | $\sqrt{3}/2$ | $1/2$ | $\sqrt{3}/3$ | $\sqrt{3}$ |
| $\pi/4$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1$ | $1$ |
| $\pi/3$ | $1/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}/3$ |
| $2\pi/3$ | $-1/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $-\sqrt{3}$ | $-\sqrt{3}/3$ |




## 2.2 Formulaire

**Théorème 2.14** (Formule fondamentale)
*Soit $\theta$ un réel.*

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

**Théorème 2.15** (Formule d'addition)
*Soient $\theta$ et $\phi$ deux réels.*

- $\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$ *;*
- $\cos(\theta-\phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi$ *;*
- $\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$ *;*
- $\sin(\theta-\phi) = \sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi$.

Exercice 2.16 (Réécriture de $a\cos\theta + b\sin\theta$)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ et $\phi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, a\cos\theta + b\sin\theta = r\cos(\theta+\phi).$$

**Corollaire 2.17** (Formule d'addition pour tan)
*Soient $\theta$ et $\phi$ deux réels tels que ni $\theta$, ni $\phi$, ni $\theta+\phi$ ne soient congrus à $\pi/2$ modulo $\pi$. Alors,*

$$\tan(\theta+\phi) = \frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi}.$$

**Corollaire 2.18** (Formules de duplication)
*Soit $\theta$ un réel.*

- $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ *;*
- $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$.

Exercice 2.19
Déterminer $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

**Corollaire 2.20** (Linéarisation de $\cos^2\theta$ et $\sin^2\theta$)
*Soit $\theta$ un réel.*
- $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$ ;
- $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$.

**Corollaire 2.21** (Produit vers somme)
*Soient $\theta$ et $\phi$ deux réels.*
- $\cos\theta\cos\phi = \dfrac{\cos(\theta+\phi)+\cos(\theta-\phi)}{2}$ ;
- $\cos\theta\sin\phi = \dfrac{\sin(\theta+\phi)-\sin(\theta-\phi)}{2}$ ;
- $\sin\theta\sin\phi = \dfrac{\cos(\theta-\phi)-\cos(\theta+\phi)}{2}$.

**Corollaire 2.22** (Somme vers produit (HP))
*Soient $\theta$ et $\phi$ deux réels.*
- $\cos\theta+\cos\phi = 2\cos(\dfrac{\theta+\phi}{2})\cos(\dfrac{\theta-\phi}{2})$ ;
- $\sin\theta+\sin\phi = 2\sin(\dfrac{\theta+\phi}{2})\cos(\dfrac{\theta-\phi}{2})$.

**Corollaire 2.23** (Paramétrisation par $u=\tan(\theta/2)$)
*Soit $\theta$ un angle non congru à $\pi$ modulo $2\pi$. On pose $u=\tan(\theta/2)$.*
- $\cos\theta = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ ;
- $\sin\theta = \dfrac{2u}{1+u^2}$
- $\tan\theta = \dfrac{2u}{1-u^2}$ *(si $\tan\theta$ est défini).*

## 2.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

**Théorème 2.24** (Forme trigonométrique)
*Soit $z$ un nombre complexe. Il existe $r\geq 0$ et $\theta\in\mathbb{R}$ un angle tel que*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

*Dans cette égalité, $r$ est (nécessairement) le module de $z$ et $\theta$ est bien défini modulo $2\pi$ (sauf quand $z=0$ où tout $\theta$ convient).*

Remarque 2.25

Deux nombres complexes non nuls $z = re^{i\theta}$ et $w = \rho e^{i\phi}$ (écrits sous forme trigonométrique) sont donc égaux ssi $r = \rho$ et $\theta \equiv \phi[2\pi]$.

Définition 2.26 (Argument)
Un tel angle $\theta$ s'appelle un *argument* de $z$.

Remarque 2.27
Des nombres complexes sont positivement liés ssi ils ont un argument commun.

Définition 2.28 (Notation exponentielle)
Soit $\theta$ un réel. On introduit la notation $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

**Théorème 2.29** (Propriétés de l'exponentielle)
*Soient $\theta$ et $\phi$ deux réels. Soit $n \in \mathbb{Z}$.*
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ ;
- $e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta}e^{i\phi}$ ;
- $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$.

**Proposition 2.30** (Produit, quotient, puissance)
*Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux complexes écrits sous forme trigonométrique. Soit $n \in \mathbb{Z}$.*
- $zz' = (rr')e^{i(\theta+\theta')}$ ;
- $z/z' = (r/r')e^{i(\theta-\theta')}$ *(si $z' \neq 0$)* ;
- $z^n = r^n e^{in\theta}$.

## 2.4 Applications calculatoires

**Proposition 2.31** (Formules d'Euler)
*Soit $\theta \in \mathbb{R}$.*

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \text{ et } \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

**Proposition 2.32** (Formule de Moivre)
*Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$.*

$$\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Exemple 2.33 (Méthode de l'angle moitié)
Soient $\theta$ et $\phi$ deux réels. Simplifier $e^{i\theta} + e^{i\phi}$.

Exemple 2.34 (Calcul d'une somme trigonométrique)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$.

Exercice 2.35

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$.

Exemple 2.36 (Application de la formule de Moivre)

Soit $\theta$ un réel. En utilisant que $\cos(3\theta) = \operatorname{Re}\big(e^{i3\theta}\big)$, on montre que

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

Exemple 2.37 (Linéarisation)

Soit $\theta$ un réel. En utilisant une formule d'Euler, on montre que

$$\sin^3\theta = \frac{1}{4}\big(3\sin\theta - \sin(3\theta)\big).$$

# 3 Équations particulières

## 3.1 Degré 2

**Théorème 3.1** (Résolution de $z^2 = w$)

*Soit $w$ un nombre complexe non nul. Il existe exactement deux nombres complexes $z$ tels que $z^2 = w$. Si $w$ est écrit sous forme trigonométrique $w = re^{i\theta}$, alors les solutions sont $z_1 = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ et $z_2 = -\sqrt{r}e^{i\theta/2} = \sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi)}$.*

Définition 3.2 (Racine carrée d'un nombre complexe)

On dit alors que $z$ est *une* racine carrée de $w$.

Attention !

Du fait de la non-unicité, la notation $\sqrt{w}$ est interdite.

Exemple 3.3

Détermination des solutions de $z^2 = -5 + 12i$.

**Corollaire 3.4** (Équation polynomiale de degré 2)

*Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et on désigne par $\delta$ une racine carrée de $\Delta$.*

- *Si $\Delta = 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet comme unique solution sur $\mathbb{C}$*

$$z = \frac{-b}{2a}.$$

- *Si $\Delta \neq 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{C}$*

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}.$$

**Corollaire 3.5** (Somme et produit des racines)
*Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$. Notons $z_1$ et $z_2$ les deux solutions (la solution comptée deux fois dans le cas d'un discriminant nul) de l'équation $az^2 + bz + c = 0$. Alors*

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Exercice 3.6
Déterminer deux nombres complexes $z$ et $w$ de somme $3 + 5i$ et de produit $-4 + 7i$.

## 3.2 Racines de l'unité

**Théorème 3.7** (Résolution de $z^n = w$)
*Soit $w$ un nombre complexe non nul, soit $n \geq 1$ un entier. Il existe exactement $n$ nombres complexes $z$ tels que $z^n = w$. Si $w$ est écrit sous forme trigonométrique $w = re^{i\theta}$, alors les solutions sont les*

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\theta/n + 2ik\pi/n}, \text{ où } k \in [\![0, n-1]\!].$$

Exercice 3.8
Résoudre les équations
- $z^3 = 2i$ ;
- $z^7 = 1 + i$.

Définition 3.9 (Racines de l'unité)
Soit $n \geq 1$. On appelle racines $n$-èmes de l'unité les solutions complexes de l'équation $z^n = 1$. Ce sont donc les nombres $z_k = e^{2ik\pi/n}$, où $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Remarque 3.10
En notant $\omega = e^{2i\pi/n}$, les racines $n$-èmes de l'unité sont les $\omega^k$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. On dit que $\omega$ est une racine $n$-ème primitive de l'unité.

Définition 3.11 (Nombre $j$)
On note $j = e^{2i\pi/3}$.

Remarque 3.12
C'est une racine cubique primitive de l'unité. Les trois racines cubiques de l'unité sont $1, j$ et $j^2 = \overline{j}$.

## 3.3 Polynômes à coefficients complexes

Remarque 3.13
Les propriétés suivantes seront démontrées plus tard dans le chapitre sur les polynômes. Elles généralisent les propriétés des polynômes de degré 2 à coefficients complexes.

**Proposition 3.14** (Principe d'identification des coefficients)
*Soient* $a_0, \dots, a_d$ *et* $b_0, \dots, b_{d'}$ *des nombres complexes, avec* $a_d \neq 0$ *et* $b_{d'} \neq 0$.
*Si, pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k z^k = \sum_{k=0}^{d'} b_k z^k$, *alors* $d = d'$ *et pour tout* $k \in [\![0, d]\!], a_k = b_k$.

**Proposition 3.15** (Factorisation complète d'un polynôme)
*Soient* $a_0, \dots, a_d$ *des nombres complexes avec* $a_d \neq 0$. *On suppose qu'il existe* $d$ *nombres complexes* $z_1, \dots, z_d$ *deux à deux distincts, tels que, pour tout* $j \in [\![1, d]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k z_j^k = 0$.
*Alors,* $\forall z \in \mathbb{C}, \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k z^k = a_d \prod_{j=1}^{d} (z - z_j)$.

**Proposition 3.16** (Théorème de d'Alembert-Gauss)
*Soient* $a_0, \dots, a_d$ *des nombres complexes avec* $a_d \neq 0$. *Il existe* $z_1, \dots, z_d \in \mathbb{C}$ *(non nécessairement deux à deux distincts) tels que*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^{d} a_k z^k = a_d \prod_{j=1}^{d} (z - z_j).$$

## 3.4 Exponentielle d'un nombre complexe

Définition 3.17 (Exponentielle d'un nombre complexe)
Soit $z = x + iy$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique. On définit son exponentielle, notée $\exp(z)$ ou $e^z$ par

$$e^z = e^x e^{iy}.$$

**Proposition 3.18** (Propriétés)
*Soient* $z, w \in \mathbb{C}$, *soit* $n \in \mathbb{Z}$.
- $e^{z+w} = e^z e^w$ ;
- $e^{nz} = (e^z)^n$.

Remarque 3.19
Plus généralement, si $(z_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres complexes, on a

$$\exp\Big(\sum_{i \in I} z_i\Big) = \prod_{i \in I} e^{z_i}.$$

**Théorème 3.20** (Solutions de $e^z = w$)
*Soit* $w = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, *écrit sous forme trigonométrique. Les solutions de l'équation* $e^z = w$ *sont les* $z_k$, $k \in \mathbb{Z}$, *définis par*

$$z_k = \ln(r) + i\theta + 2ik\pi.$$

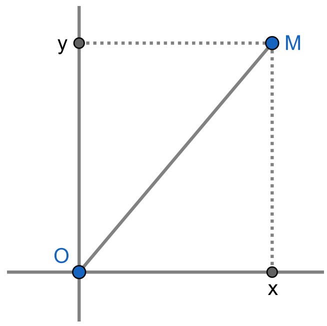
*L'équation $e^z = 0$ n'a pas de solution.*

Remarque 3.21
En particulier $\exp(z) = 1$ ssi $z$ est de la forme $2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ; et $\exp(z) = \exp(z')$ ssi $z - z'$ est de la forme $2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

# 4 Géométrie du plan

## 4.1 Interprétation géométrique des complexes

Définition 4.1 (Affixe d'un point/d'un vecteur)
Dans le plan usuel, identifié à $\mathbb{R}^2$, un point $M$ a pour affixe $z$ si $M$ a pour coordonnées $(x, y)$ et que $z = x + iy$. On considère aussi que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe $z$.




Remarque 4.2
En pratique, on confondra véritablement algèbre et géométrie et on écrira souvent qu'un point/un vecteur est *égal* au nombre complexe correspondant.

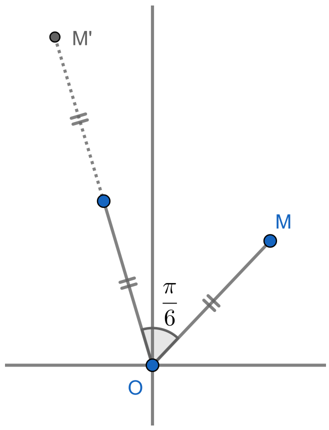
**Proposition 4.3** (Addition, multiplication par un réel, conjugaison)
*Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes, correspondant à des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Soit $\lambda$ un réel. Alors,*
- *$z + z'$ correspond au vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ ;*
- *$\lambda z$ correspond au vecteur $\lambda \vec{u}$ ;*
- *$\overline{z}$ correspondant au vecteur, image de $\vec{u}$ par la symétrie axiale d'axe la droite des abscisses.*

**Proposition 4.4** (Module)
*Soient $M$ et $M'$ des points du plan d'affixe $z$ et $w$. Alors,*
- *$|z|$ est la distance de $M$ à l'origine.*
- *$|z - w|$ est la longueur $MM'$.*

**Proposition 4.5** (Produit de deux nombres complexes)
*Soit $z$ un complexe, correspondant à un point $M$. Soit $w$ un complexe, écrit sous forme*

*trigonométrique $w = re^{i\theta}$. Le point $M'$ correspondant à $zw$ est obtenu en appliquant à $M$ une rotation d'angle $\theta$ et une homothétie de rapport $r$, toutes les deux de centre $O$.*

Exemple 4.6
Une illustration avec $w = \sqrt{3} + 1 = 2e^{i\pi/6}$.




**Corollaire 4.7** (Rapport $\dfrac{c-a}{b-a}$)
*Soient $a, b, c$ trois complexes, tels que $a \neq b$. Écrivons le rapport $\dfrac{c-a}{b-a}$ sous forme trigonométrique $re^{i\theta}$. Soient $A$, $B$ et $C$ les points correspondants à $a$, $b$ et $c$. Alors*
- $r = \dfrac{AC}{AB}$ ;
- *$\theta$ est l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.*

**Corollaire 4.8** (Conditions d'alignement et d'orthogonalité)
*Avec les notations précédentes,*
- *$A, B, C$ sont alignés ssi $\dfrac{c-a}{b-a}$ est réel ;*
- *$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux ssi $\dfrac{c-a}{b-a}$ est imaginaire pur.*

## 4.2 Similitudes directes

Définition 4.9 (Similitudes directes du plan)
Une similitude (directe) du plan est une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, de la forme $f : z \mapsto az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Remarque 4.10
On omet dans la suite l'adjectif *directe*.

**Proposition 4.11** (Préservation de l'alignement)
*Les similitudes préservent l'alignement des points : trois points sont alignés ssi leur image*

*par une similitude le sont.*

**Proposition 4.12** (Cas particuliers)
*Soit $f$ une similitude.*

- *Si $f$ est de la forme $z \mapsto z + b$, alors $f$ est une translation, de vecteur ayant $b$ pour affixe ;*
- *Si $f$ est de la forme $z \mapsto rz$, avec $r > 0$, alors $f$ est une homothétie de centre $O$ et de rapport $r$ ;*
- *Si $f$ est de la forme $z \mapsto uz$, avec $|u| = 1$, alors $f$ est une rotation de centre $O$ et d'angle un argument de $u$.*

**Corollaire 4.13** (Caractérisation des similitudes)
*Soit $f$ une similitude. On note $\mathcal{E}_f$ l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = z$.*

- *Si $\mathcal{E}_f = \mathbb{C}$, alors $f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ ;*
- *Si $\mathcal{E}_f = \emptyset$, alors $f$ est une translation de vecteur non nul ;*
- *Sinon, $\mathcal{E}_f$ est réduit à un point, noté $w$. Alors, $f$ s'écrit comme la composée d'une homothétie de rapport $r > 0$ et d'une rotation d'angle $\theta$, toutes deux de centre $w$.*