DM 3 - Homographies et birapport

Dans tout le problème, on appelle *homographie* une fonction h de $\mathbb{C}$ dans lui-même, de la forme $h : z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ sont tels que $ad - bc \neq 0$. On a l'alternative suivante[1] :

- Ou bien $c = 0$ et h est une similitude, définie sur $\mathbb{C}$;
- Ou bien $c \neq 0$ et h est définie sur $\mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$. On dit que $-\frac{d}{c}$ est le *pôle* de h.

1 Questions préliminaires

Soient f et g deux homographies. On note $g \circ f$ leur composée, définie par $z \mapsto g\big(f(z)\big)$.

1. Montrer que $g \circ f$ est bien définie sur un ensemble de la forme $\mathbb{C} - X$, où $X \subset \mathbb{C}$ contient au plus deux points.
2. Montrer qu'il existe une homographie h telle que $\forall z \in \mathbb{C} - X, g \circ f(z) = h(z)$.

Avec un léger abus de notation, on écrira simplement $g \circ f = h$ dans la suite.

3. Soit f une homographie. Montrer que tout $w \in \mathbb{C}$, sauf peut-être un, admet un unique antécédent par f. *On note $f^{-1}(w)$ cet antécédent.*
4. Montrer que $f^{-1} : w \mapsto f^{-1}(w)$ est une homographie et qu'on a les égalités

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}, \quad \text{où } \mathrm{id}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z.$$

2 Birapports

Soient z_1, z_2, z_3, z_4 des nombres complexes deux à deux distincts. On définit le birapport

$$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}}{\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \times \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}.$$

On cherche à montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

(A) le birapport $[z_1 : z_2 : z_3 : z_4]$ est réel ;

(B) z_1, z_2, z_3 et z_4 sont alignés ou cocycliques.

1. **Sens $(B) \implies (A)$.**
   (a) Montrer que si z_1, z_2, z_3, z_4 sont alignés, alors $[z_1 : z_2 : z_3 : z_4]$ est réel.
   (b) Montrer que si z_1, z_2, z_3, z_4 sont cocycliques, alors $[z_1 : z_2 : z_3 : z_4]$ est réel.

[1] Les complexes a, b, c, d ne sont pas déterminés de façon unique par h (on peut les multiplier par un même complexe non nul), mais on vérifie aisément que les conditions qui suivent ne dépendent pas de la représentation choisie.

2. **Des homographies envoyant le cercle unité sur l'axe réel.**

   On considère l'homographie $f : z \mapsto i\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$.

   (a) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} - \{1\}, z \in \mathbb{U} \iff f(z) \in \mathbb{R}$.

   (b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant f, construire une homographie f_θ, de pôle $e^{i\theta}$, telle que
   $$\forall z \in \mathbb{C} - \{e^{i\theta}\}, z \in \mathbb{U} \iff f(z) \in \mathbb{R}.$$

   (c) Montrer que les homographies f_θ préservent le birapport, au sens suivant :
   $$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} - \{e^{i\theta}\}, [f_\theta(z_1) : f_\theta(z_2) : f_\theta(z_3) : f_\theta(z_4)] = [z_1 : z_2 : z_3 : z_4].$$
   On pourra se ramener au cas $\theta = 0$ et remarquer que $\dfrac{1+z}{1-z} = 1 + \dfrac{2}{1-z}$, si $z \neq 1$.

3. **Sens** $(A) \implies (B)$**.** Soient z_1, z_2, z_3, z_4 des nombres complexes deux à deux distincts.

   (a) On suppose que z_1, z_2, z_3 appartiennent à une même droite Δ et que $[z_1 : z_2 : z_3 : z_4]$ est réel, montre que $z_4 \in \Delta$.

   On suppose désormais z_1, z_2, z_3 non alignés et on note $\mathscr{C}$ le cercle passant par z_1, z_2, z_3.

   (b) Montrer qu'il existe une homographie g dont le pôle p n'est pas l'un des z_i, et vérifiant la propriété suivante : $\forall z \in \mathbb{C} - \{p\}, z \in \mathscr{C} \iff g(z) \in \mathbb{R}$.

   (c) Conclure.

4. **Une application :** Déterminer les complexes z tels que 1, z, $1/z$ et $1 - z$ soient cocycliques.

3 Homographies préservant le disque unité

On note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ le disque unité ouvert et K l'ensemble des homographies h telles que

- Le pôle éventuel de h n'est pas contenu dans $\mathbb{D}$.
- L'ensemble $h(\mathbb{D})$ – défini comme $\{h(z), z \in \mathbb{D}\}$ – est égal à $\mathbb{D}$.

On cherche à établir la classification de ces homographies.

1. Montrer que si f et g sont dans K, alors $g \circ f$ et f^{-1} aussi.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{D}$. Montrer que l'homographie $f_\alpha : z \mapsto \dfrac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$ est dans K et vérifie $f_\alpha(\alpha) = 0$.
3. On considère un élément $f \in K$ tel que $f(0) = 0$.

   (a) Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $f(z) = \dfrac{\alpha z}{\beta z + 1}$.

   (b) Donner l'expression de f^{-1}.

   (c) Montrer que $|\beta| \leq 1$ et que $|\beta| \leq |\alpha|$.

   (d) Pour tout $z \in \mathbb{D}$, montrer que $|\alpha z| < |\beta z + 1|$ et $|z| < |-\beta z + \alpha|$.

   (e) En déduire que pour tout $t \in [0, 1[$, $|\alpha| t < 1 - |\beta| t$ et $t < |\alpha| - |\beta| t$.

   (f) En faisant tendre t vers 1 dans les inégalités précédentes, montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que f est de la forme $z \mapsto e^{i\theta} z$.

4. Conclure.