DM 4 - Inégalité isopérimétrique

Soit $n \geq 3$ un entier ; on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On appelle *polygone à n côtés* un élément $Z = (z_0, \ldots, z_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$. Pour simplifier les notations, on convient que $z_n = z_0$. Le polygone Z est dit *équilatéral* si la quantité $|z_{k+1} - z_k|$ ne dépend pas de $k \in [\![0, n-1]\!]$, *régulier* s'il existe une similitude (directe) f telle que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $z_k = f(\omega^k)$.

On dit que Z est *non réduit à un point* s'il existe deux indices $i, j \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $z_i \neq z_j$. Le *polygone conjugué* de Z est le polygone $\overline{Z} = (\overline{z_0}, \ldots, \overline{z_{n-1}})$. On définit les nombres complexes $\hat{z}_j$, pour $j \in [\![0, n-1]\!]$ par :

$$\hat{z}_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (\overline{\omega}^j)^k z_k.$$

On associe à un polygone Z les trois quantités suivantes :

$$L(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \; ; \; E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|^2 \text{ et } A(Z) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1} \overline{z_k} \right).$$

Le but du problème est de montrer l'inégalité isopérimétrique pour les polygones :

$$\frac{|A(Z)|}{L(Z)^2} \leq \frac{1}{4n \tan(\pi/n)},$$

si Z est non réduit à un point, l'égalité ayant lieu si, et seulement si, Z ou $\overline{Z}$ est régulier.

Questions préliminaires

1. Soit M un point de Δ. L'aire de ABM est égale à la moitié du produit de la longueur AB et de la longueur de la hauteur passant par M. Quand M varie sur Δ, cette hauteur subit une translation ; en particulier, sa longueur est constante. Donc l'aire de ABM est constante.

   Munissons maintenant le plan d'un repère orthonormé de sorte que

   - l'origine du repère est au milieu I de $[AB]$;
   - les droites (AB) et Δ ont pour équation $y = 0$ et $y = 1$;
   - A et B sont les points de coordonnées $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

   Un point M sur Δ a pour coordonnée $(x, 1)$ pour un réel x. La quantité $AM + BM$ vaut donc, par le théorème de Pythagore :

   $$AM + BM = \sqrt{(x-1)^2 + 1} + \sqrt{(x+1)^2 + 1},$$

qu'on note $f(x)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (les quantités sous les $\sqrt{\ }$ étant supérieures à 1). On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+1}} + \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}.$$

Comme f' est impaire, on peut étudier son signe sur $\mathbb{R}_+$. Il est clair que $f'(x) \geq 0$ si $x \geq 1$. Considérons alors $x \in [0,1]$; on réécrit :

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{(x-1)^2+1}} + \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{1+(x-1)^{-2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+(x+1)^{-2}}}.$$

Comme $x \in [0,1]$, on a $(x+1)^2 \geq (x-1)^2$. On en déduit que $f'(x) \geq 0$.

Bilan : $f' \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et donc $f' \leq 0$ sur $\mathbb{R}_-$. Ainsi, f admet un minimum en 0. Géométriquement, la quantité $AM + BM$ est minimale si M est sur la médiatrice de $[AB]$.

2. Commençons par traiter le problème de l'orientation. Notons θ et ϕ des arguments de a et b. Le triangle OAB est direct ssi le triangle BOA est direct ssi l'angle $\widehat{BOA}$ est dans $[0,\pi]$ (modulo 2π). Or cet angle est congru à $\phi - \theta$ modulo 2π. Comme $\phi - \theta$ est un argument de $\bar{a}b$, on en déduit que OAB est direct ssi $\mathrm{Im}(\bar{a}b) \geq 0$.

   Pour montrer l'égalité des aires absolues, on peut par exemple utiliser la question précédente. Notons Δ la parallèle à $(0A)$ passant par B et B' le point sur (OA) tel que (OB') est orthogonal à (OA). D'aprus la question précédente, l'aire (absolue) de OAB est égale à celle de OAB'. De plus, b' est de la forme $b + ta$, pour un certain réel t, de sorte que

$$\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{a}b') = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{a}(b+ta)) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{a}b + t|a|^2) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{a}b).$$

   Il suffit donc de montrer le résultat pour le triangle OAB', rectangle en 0. Or l'aire de ce rectangle est $\frac{1}{2}|a||b'|$. Comme $\bar{a}b'$ est imaginaire pur, on a par ailleurs $\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{a}b') = \pm|\bar{a}b'| = \pm|a||b'|$, ce qui conclut.

3. On calcule :

$$\begin{aligned}
A(Z+c) &= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}+c)\overline{z_k+c}\right)\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1}\overline{z_k} + z_{k+1}\bar{c} + c\overline{z_k} + |c|^2\right)\\
&= A(Z) + \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} z_k\bar{c} + c\overline{z_k}\right)\\
&= A(Z).
\end{aligned}$$

   Pour le passage de la deuxième à la troisième ligne, on a d'une part utilisé que $|c^2|$ est réel et d'autre part, on a effectué le changement de variable $l = k+1$ sur le terme $z_{k+1}\bar{c}$

: les bornes de la somme sont inchangées car les points $z_1, \dots, z_n$ sont les mêmes que les points $z_0, \dots, z_{n-1}$.

Pour la dernière égalité, on constate que dans la somme restante, les termes valent $2\mathrm{Re}(z_k\overline{c})$.

4. Supposons d'abord que le polygone Z est convexe et contient l'origine dans son intérieur. Alors, l'aire du polygone est obtenue en découpant ce polygone en triangles constitués de deux sommets consécutifs et de l'origine : l'aire du polygone est la somme des aires de ces triangles. Par la question 2., c'est ainsi qu'est définie $A(Z)$.

   Si Z est convexe mais ne contient pas l'origine dans son intérieur, on peut le translater par un $c \in \mathbb{C}$, pour que $Z+c$ contienne l'origine dans son intérieur. L'aire de Z est égale à l'aire de $Z+c$ et $A(Z) = A(Z+c)$. Donc, dans ce cas aussi, $A(Z)$ correspond à l'aire du polygone.

   Le cas général est plus complexe : si la notion d'aire est assez intuitive pour certains polygones non convexes, elle l'est moins pour d'autres : qu'est-ce que l'aire d'un polygone croisé par exemple ?

   On pourrait plutôt partir de la définition d'aire par l'expression $A(Z)$ et vérifier qu'elle satisfait bien les propriétés attendues pour l'aire d'un polygone : invariance par translation, égalité pour les triangles, propriété d'additivité pour des polygones obtenus par recollage...

   Quant à $L(Z)$, c'est simplement le périmètre de Z.

5. Soit Z un polygone régulier direct. Notons $f : z \mapsto az+b$ une similitude telle que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f(\omega_k) = z_k$.

$$L(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} |(a\omega^{k+1}+b) - (a\omega^k + b)| = |a| \sum_{k=0}^{n-1} |\omega^{k+1} - \omega^k| = n|a||\omega - 1|.$$

   Or, $|\omega - 1| = |e^{2i\pi/n} - 1| = |e^{i\pi/n} 2i \sin(\pi/n)| = 2\sin(\pi/n)$. Donc $L(Z) = 2n|a|\sin(\pi/n)$.

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} |a(\omega^{k+1}+b) - (a\omega^k + b)|^2 = 4n|a|^2 \sin^2(\pi/n)$$

   par un calcul analogue.

$$A(Z) = A(Z-b) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a\omega^{k+1}\overline{a\omega^k}\right) = \frac{1}{2} n|a|^2\,\mathrm{Im}(\omega) = \frac{n}{2}|a|^2 \sin(2\pi/n).$$

   D'où les rapports :

$$\frac{A(Z)}{L(Z)^2} = \frac{1}{2n}\frac{\sin(2\pi/n)}{4\sin^2(\pi/n)} = \frac{1}{4n\tan(\pi/n)}.$$
$$\frac{A(Z)}{E(Z)} = \frac{\sin(2\pi/n)}{2\times 4\sin^2(\pi/n)} = \frac{1}{4\tan(\pi/n)}.$$
$$\frac{L(Z)^2}{E(Z)} = n.$$

6. C'est la somme des termes d'une suite géométrique. Si $p \equiv 0[n]$, alors $\omega^p = 1$ et la somme vaut n. Sinon, elle vaut

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k = \frac{1-(\omega^p)^n}{1-\omega^p} = 0$$

car $(\omega^p)^n = (\omega^n)^p = 1$.

Donc la somme vaut n si $p \equiv 0[n]$ et 0 sinon.

7. . Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$. On calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^j)^k \hat{z}_k &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^j)^k \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=0}^{n-1} (\overline{\omega}^k)^l z_l \\
&= \frac{1}{n} \sum_{0 \leq k,l \leq n-1} (\omega^{j-l})^k z_l \\
&= \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{j-l})^k \Big) z_l
\end{aligned}$$

Or, pour $l \in [\![0, n-1]\!]$, $j-l$ est congru à 0 modulo n ssi $j = l$. Par la question précédente, on a donc :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^j)^k \hat{z}_k = \frac{1}{n} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} 1 \Big) z_j = z_j.$$

Rapport $A(Z)/E(Z)$

8. On calcule, en utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned}
A(Z) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1} \overline{z_k} \right) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=0}^{n-1} (\omega^{k+1})^l \hat{z}_l \times \overline{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{n-1} (\omega^k)^m \hat{z}_m} \right) \\
&= \frac{1}{2n} \operatorname{Im} \left(\sum_{0 \leq l,m \leq n-1} \omega^l \hat{z}_l \overline{\hat{z}_m} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{l-m})^k \right) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\sum_{l=0}^{n-1} \omega^l |\hat{z}_l|^2 \right) \\
A(Z) &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2l\pi}{n} \right) |\hat{z}_l|^2.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Big| \sum_{l=0}^{n-1} (\omega^{k+1})^l \hat{z}_l - \sum_{l=0}^{n-1} (\omega^k)^l \hat{z}_l \Big|^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Big| \sum_{l=0}^{n-1} (\omega^l - 1)(\omega^l)^k \hat{z}_l \Big|^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{0 \le k,l,m \le n-1} (\omega^l - 1)(\omega^l)^k (\overline{\omega}^m - 1)(\overline{\omega}^m)^k \hat{z}_l \overline{\hat{z}_m} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{0 \le l,m \le n-1} (\omega^l - 1)(\overline{\omega}^m - 1) \hat{z}_l \overline{\hat{z}_m} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^k)^{l-m} \\
&= \sum_{l=0}^{n-1} |\omega^l - 1|^2 |\hat{z}_l|^2 \\
E(Z) &= 4 \sum_{l=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{l\pi}{n}\right) |\hat{z}_l|^2.
\end{aligned}
$$

9. On a donc $E(Z) - 4\tan(\pi/n)A(Z)$:

$$
= \sum_{k=0}^{n-1} \Big(4\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) - 2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \Big) |\hat{z}_k|^2.
$$

Comme $\sin(2k\pi/n) = 2\sin(k\pi/n)\cos(k\pi/n)$, on en déduit l'égalité souhaitée ;

$$
E(Z) - 4\tan(\frac{\pi}{n})A(Z)
$$

est égal à :

$$
4 \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \left(\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right) |\hat{z}_k|^2.
$$

Dans la somme, le terme pour $k = 0$ est nul. Par croissance de sin sur $[0, \pi/2]$ et décroissance de cos sur $[0, \pi/2]$, le terme dans la somme est supérieur à

$$
\sin(k\pi/n)\Big(\sin(\pi/n) - \tan(\pi/n)\cos(\pi/n) \Big) |\hat{z}_k|^2 = 0,
$$

quand $k\pi/n \in [\pi/n, \pi/2]$, c'est-à-dire si $1 \le k \le n/2$. Enfin, si $n/2 < k \le n-1$, le terme dans la somme est positif car $\sin(k\pi/n)$ et $\tan(\pi/n)$ sont positifs, alors que $\cos(k\pi/n)$ est négatif.

Bilan : on a une somme de termes positifs. Donc,

$$
E(Z) - 4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) A(Z) \ge 0.
$$

D'où $\dfrac{A(Z)}{E(Z)} \leq \dfrac{1}{4\tan(\pi/n)}$. On peut appliquer la même inégalité à $\overline{Z}$ qui vérifie immédiatement $A(\overline{Z}) = -A(Z)$ et $E(\overline{Z}) = E(Z)$. On a donc aussi $\dfrac{-A(Z)}{E(Z)} \leq \dfrac{1}{4\tan(\pi/n)}$. D'où l'inégalité :

$$\frac{|A(Z)|}{E(Z)} \leq \frac{1}{4\tan(\pi/n)}.$$

10. Z vérifie l'égalité $E(Z) = 4\tan(\pi/n)A(Z)$ ssi tous les termes

$$\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left(\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)|\hat{z}_k|^2$$

sont nuls, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Or, les deux premiers termes sont effectivement nuls (pour $k = 0$ et $k = 1$), mais on se convainc aisément que les inégalités obtenues précédemment sont strictes : pour $k \in [\![2, n-1]\!]$,

$$\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left(\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) > 0.$$

Dès lors, l'égalité recherchée est équivalente à demander que $\hat{z}_k$ soit nul, pour $k \in [\![2, n-1$. Par l'identité de la question 7, on a alors :

$$\forall j \in [\![0, n-1]\!], z_j = \frac{1}{\sqrt{n}}(\hat{z}_0 + \omega^j \hat{z}_1).$$

Ainsi, Z satisfait l'égalité $E(Z) = 4\tan(\pi/n)A(Z)$ ssi Z est un polygone régulier. Si on souhaite que l'égalité soit satisfaite avec les valeurs absolues, c'est équivalent à demander que Z ou $\overline{Z}$ est régulier.

Rapport $A(Z)/L(Z)^2$

On admet qu'il existe un polygone Z_0 tel que, pour tout polygone Z non réduit à un point

$$\frac{A(Z)}{L(Z)^2} \leq \frac{A(Z_0)}{L(Z_0)^2}.$$

On note α le rapport $\dfrac{A(Z_0)}{L(Z_0)^2}$.

11. Déjà, $A(Z)$ doit être positif, sinon le rapport $A(Z)/L(Z)^2$ est négatif et ne peut pas valoir $\alpha > 0$.

Supposons par l'absurde que Z ne soit pas équilatéral. Alors on peut trouver un indice $k \in [\![0, n-1$ tel que $|z_k - z_{k-1}| \leq |z_{k+1} - z_k|$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère le polygone Z_t dont tous les sommes sont ceux de Z, sauf z_k, modifié en $z_{k,t} = z_k + t(z_{k+1} - z_{k-1})$. Géométriquement, on déplace le sommet z_k parallèlement à $z_{k+1} - z_{k-1}$. Par la question 1., l'aire du triangle de sommets $z_{k-1}, z_{k,t}, z_{k+1}$ ne depend pas de t, et donc $A(Z_t) = A(Z)$, pour tout réel t (ceci peut être vu directement par la formule donnant $A(Z_t)$; elle diffère de celle de $A(Z)$ seulement sur l'aire d'un triangle).

Ainsi, parmi les polygones Z_t, un qui maximise le rapport $\dfrac{A(Z)}{L(Z)}^2$ doit minimiser $L(Z)$. D'après la question 1., cette longueur est minimale quand z_k est égale à distance de z_{k-1} et z_{k+1}. Donc $|z_k - z_{k-1}| = |z_{k+1} - z_k|$. C'est absurde.

Bilan : Z est équilatéral.

12. Soit Z tel que $\dfrac{A(Z)}{L(Z)^2} = \alpha$. Alors Z est équilatéral par la question précédente. Or, pour un polygone équilatéral, on constate immédiatement que le rapport $L(Z)^2/E(Z)$ vaut n. Donc, Z maximise aussi le rapport $A(Z)/E(Z)$. D'après la question 10., cela implique que Z ou $\bar{Z}$ est régulier

    (En fait, comme on n'a pas mis de valeur absolue sur l'aire, c'est nécessairement Z qui doit être régulier.

    Bilan : tout polygone Z vérifie l'inégalité

    $$\frac{|A(Z)|}{L(Z)^2} \leq \frac{1}{4n\tan(\pi/n)}$$

    et il y a égalité ssi Z ou $\overline{Z}$ est régulier.