Nombres complexes et trigonométrie

1 Nombres complexes

Exercice 1. ◐○○ – *(In)équations avec des complexes*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ (on pourra représenter graphiquement les ensembles de solutions) :

1. $|z-i-1|=1$;
2. $1<|2z-6|<2$;
3. $|z-1|^2+|z+1|^2<8$;
4. $|z-1|+|z+1|\leq 2$;
5. $|z-1|<|z|$;
6. $|\mathrm{Re}(z)|<|z|$;
7. $\mathrm{Re}(iz+2)>0$;
8. $|z-i|^2+|z+i|^2<2$.

Exercice 2. ◐○○ – *Un nombre réel*

Soient z et z' des nombres complexes de module 1 tels que $zz'\neq -1$. Montrer que

$$\frac{z+z'}{1+zz'}\in\mathbb{R}.$$

Exercice 3. ◐○○ – *Forme trigonométrique*

Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Mettre sous forme trigonométrique :

1. $\left(-1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^6$;
2. $\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}{(1+i)^3}$;
3. $z=1+\sin\theta-i\cos\theta$;
4. $w=1-i\tan\theta$

Exercice 4. ♣ – ●◐○ – *Forme trigonométrique - 2*

On considère $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}-i\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Mettre z sous forme trigonométrique.

Exercice 5. ♣ – ●●○ – *Un coefficient binomial sur trois*

Soit $n\geq 1$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n=\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ k\equiv 0[3]}}\binom{n}{k},\ B_n=\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ k\equiv 1[3]}}\binom{n}{k},\ C_n=\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ k\equiv 2[3]}}\binom{n}{k}.$$

Exercice 6. ●●○ – *Manipulation de l'inégalité triangulaire*

Soit $z\in\mathbb{C}$. Montrer que

$$|z^2-1|\leq 8 \implies |z-2|\leq 5.$$

Exercice 7. ♣ **– ●●○ –** *Variation sur l'inégalité triangulaire*

Soient $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes. Montrer que

$$\frac{|\sum_{k=1}^{n} z_k|}{1+|\sum_{k=1}^{n} z_k|} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{1+|z_k|}.$$

2 Trigonométrie

Exercice 8. ●○○ – *Équations trigonométriques*

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\sin(3x+\pi/4) = \sin(x+\pi/3)$;
2. $\cos x + \sqrt{3}\sin x + \sqrt{2} = 0$;
3. $\cos(x+\pi/6)\cos(x-\pi/6) = 1/2$;
4. $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) \leq 1$.

Exercice 9. ●○○ – *Valeur de* $\cos(\pi/5)$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.
2. En déduire la valeur de $\cos^2(\pi/10)$, puis la valeur de $\cos(\pi/5)$.

Exercice 10. ●○○ – *Des sommes trigonométriques*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb)$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin(a+kb)$;
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kb)$;
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kb)}{\cos^k(b)}$.

Exercice 11. ♣ **– ●◐○ –** *Polynômes de Tchebychev, première approche*

On définit une famille de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence de la façon suivante :

$$T_0 = 1,\ T_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Ce sont les polynômes de Tchebychev (de première espèce).

1. Calculer les polynômes T_n, pour $n \leq 4$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall\theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

On admet que T_n est le seul polynôme P vérifiant $\forall\theta \in \mathbb{R}, P(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

3. En utilisant la formule de Moivre, déterminer une formule explicite pour T_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12. ●●○ – *Un produit de cosinus et une suite récurrente*

Soit θ un réel non nul.

1. Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$

2. Déterminer la limite de P_n quand $n \to +\infty$. *On admet que* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.

3. Étudier la convergence de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 13. ♣ – ●●○ – *Un produit de sinus*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se propose de calculer le produit suivant :
$$P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

1. On pose $R_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. Montrer que $P_n^2 = R_n$.
2. Déterminer les $2n-1$ solutions complexes non nulles de l'équation $(z-1)^{2n} - 1 = 0$. On les note $z_1, \dots, z_{2n-1}$.
3. On pose $U_n = \prod_{k=1}^{2n-1} z_k$. Exprimer U_n en fonction de R_n.
4. Calculer U_n et en déduire P_n.

Exercice 14. ♣ – ●●○ – *Une somme avec des puissances de tangente*

Soient $n \geq 1$ et $\alpha \not\equiv \pi/2[\pi]$. Montrer que
$$\sum_{0\leq 2k+1\leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \tan^{2k+1}\alpha = \frac{\sin(n\alpha)}{\cos^n \alpha}.$$

Exercice 15. ♣ – ●●◐ – *Somme et produit de cosinus*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer l'identité
$$\sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{\pm 1\}^n} \cos\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \theta_k\right) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \cos(\theta_k).$$

3 Équations

Exercice 16. ○○○ – *Racines n-èmes*

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 = 1 - i$;
2. $z^3 = -8$;
3. $z^4 = i$;
4. $z^{25} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Exercice 17. ●○○ – *Équation, à l'envers*

Soit $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Trouver deux réels p et q tels que $z^2 + pz + q = 0$.

Exercice 18. ●○○ – *Racines de l'unité*

Soit $n \geq 1$ un entier. On note $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ les n racines de l'unité. Montrer que

1. $\forall k \in [\![1, n-1]\!], \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j^k = 0$;
2. $\prod_{j=0}^{n-1} \omega_j = (-1)^{n-1}$
3. $\sum_{j=0}^{n-1} (1+\omega_j)^n = 2n$
4. $\forall z \in \mathbb{C}, \prod_{j=0}^{n-1} (z - \omega_j) = z^n - 1$.

Exercice 19. ●○○ – *Avec le conjugué*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^n = \overline{z}$;
2. $1 + \overline{z} = |z|$;
3. $z^4 = z + \overline{z}$;

Exercice 20. ♣ – ●◐○ – *Équations avec des complexes*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 - (2+i)z + i + 7 = 0$;
2. $z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0$;
3. $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$;
4. $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$;
5. $z^3 - (3+i)z^2 - (2+5i)z + 8 + 14i = 0$;
6. $(1+iz)^n + (1-iz)^n = 0$.

4 Géométrie

Exercice 21. ◐○○ – *Écriture de similitudes*

1. Déterminer l'expression de la similitude, composée de la rotation d'angle $\pi/3$ et de l'homothétie de rapport 2, toutes deux de centre $i - 2$.

2. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude donnée par

$$f(z) = -3z + 4(1-2i).$$

Exercice 22. ●○○ – *Un lieu géométrique*

Soit $\rho > 0$, soient $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. On s'intéresse au lieu $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \rho|z - z_1|\}$.

1. Identifier E si $\rho = 1$.
2. On suppose $\rho \neq 1$. Montrer que E est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 23. ●○○ – *Triangle équilatéral*

Soient A, B et C des points du plan, d'affixes a, b et c.

1. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct (l'angle $\widehat{BAC}$ vaut $\pi/3$) ssi
$$a + bj + cj^2 = 0.$$
2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral ssi
$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$
3. Montrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral (non réduit à un point) dont les trois sommets sont à coordonnées entières.

Exercice 24. ●◐○ – *Un invariant des polygones réguliers*

Soient $S_1, \ldots, S_n$ des points du plan, sommets d'un polygone régulier, inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$. Montrer que la quantité $\sum_{k=1}^{n} S_k M^2$ ne dépend pas du point $M \in \mathscr{C}$.

Exercice 25. ●◐○ – *Similitude conjuguée*

Soient f et g des similitudes directes du plan complexe. Caractériser la similitude $g \circ f \circ g^{-1}$ quand

1. f est une translation ;
2. f est la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre.

Exercice 26. ♣ – ●◐○ – *Un parallélogramme*

Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que z et ses trois racines cubiques forment un parallélogramme.

Exercice 27. ●●◐ – *Points cocycliques*

Déterminer les nombres complexes z tels que 1, z, $1/z$ et $1 - z$ soient cocycliques.

Indications

Exercice 1. Si $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, quels sont les z vérifiant $|z - a| = r$? les z vérifiant $|z - a| \leq r$?

Exercice 2. Exploiter simplement que z et z' sont de module 1. Comment caractériser les nombres réels, parmi les nombres complexes ?

Exercice 4. Calculer z^2

Exercice 5. Adapter le calcul fait pour la somme des coefficients d'indice pair/impair.

Exercice 6. Raisonner par contraposée.

Exercice 12. Faire apparaître un produit téléscopique.

Exercice 13. Pour la question 4., on utilisera les résultats sur les polynômes admis dans le cours.

Exercice 14. Reconnaître en la somme la partie réelle ou imaginaire d'une puissance développée par la formule du binôme.

Exercice 15. On pourra procéder par récurrence.

Exercice 17. On cherche un polynôme de degré 2 à coefficients réels dont z est racine. Choisir simplement l'autre racine.

Exercice 18. Les trois premiers calculs sont explicites. Pour le dernier, utiliser les résultats sur les polynômes admis dans le cours.

Exercice 20. 3. se simplifie avec une formule bien connue. Pour 6., commencer par déterminer $\dfrac{1+iz}{1-iz}$.

Exercice 23. Comment traduire le fait que ABC est équilatéral direct avec une rotation de centre A ?

Exercice 26. Si a est l'une de ses racines cubiques, comment s'écrivent les 3 autres points ?

Exercice 27. On pourra se renseigner sur la notion de birapport.