

## DM 3 - Homographies et birapport

## 1 Questions préliminaires

1. Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Pour que  $g \circ f(z) = g(f(z))$  soit bien définie, il faut et il suffit que  $z$  ne soit pas le pôle éventuel de  $f$  et que  $f(z)$  (si défini) ne soit pas le pôle éventuel de  $g$ . Or, si  $w \in \mathbb{C}$  est un point quelconque, on constate immédiatement (et on le montrera question 3) que l'équation  $f(z) = w$  admet au plus une solution. Donc, il y a au plus un  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $f(z)$  est le pôle éventuel de  $g$ .

En prenant pour  $X$  l'ensemble formé par le pôle (éventuel) de  $f$  et l'unique antécédent (éventuel) du pôle (éventuel) de  $g$ , on a montré que  $g \circ f$  est bien définie sur  $\mathbb{C} - X$ .

2. Soit  $z \in \mathbb{C} - X$ . On écrit  $f$  et  $g$  comme  $f : w \mapsto \frac{aw+b}{cw+d}$  et  $g : w \mapsto \frac{a'w+b'}{c'w+d'}$  avec  $a, b, c, d, a', b', c', d'$  des complexes tels que  $ad - bc \neq 0$  et  $a'd' - b'c' \neq 0$ . On calcule :

$$\begin{aligned} g \circ f(z) &= g\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \\ &= \frac{a' \frac{az+b}{cz+d} + b'}{c' \frac{az+b}{cz+d} + d'} \\ &= \frac{a'(az+b) + b'(cz+d)}{c'(az+b) + d'(cz+d)} \\ g \circ f(z) &= \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)z + (c'b + d'd)} \end{aligned}$$

De plus,  $(a'a + b'c)(c'b + d'd) - (a'b + b'd)(c'a + d'c) = a'd'ad + b'c'bc - a'd'bc - b'c'ad$ , après simplifications et on reconnaît :  $(ad - bc)(a'd' - b'c')$ , qui est donc non nul.

3. On écrit  $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  avec  $ad - bc \neq 0$ . Soit  $w \in \mathbb{C}$ . Soit  $z \in \mathbb{C}$  différent du pôle éventuel de  $f$ . On a

$$f(z) = w \iff \frac{az+b}{cz+d} = w \iff az+b = w(cz+d) \iff z(a-cw) = -b+dw.$$

- Si  $a - cw \neq 0$ , l'unique antécédent de  $w$  par  $f$  est donc  $\frac{-b+dw}{a-cw}$ .
- Si  $a - cw = 0$ , alors  $c \neq 0$  (car  $a$  et  $c$  ne peuvent pas tous les deux être nuls) donc  $w = \frac{a}{c}$ . Alors,  $-b+dw \neq 0$  car  $ad - bc \neq 0$ . Ainsi,  $w = \frac{a}{c}$  n'a pas d'antécédent par  $f$ .

4. On pose  $f^{-1} : w \mapsto \frac{dw-b}{-cw+a}$ . Comme  $da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0$ ,  $f^{-1}$  est une homographie. Soit  $w \in \mathbb{C}$  tel que  $f \circ f^{-1}$  est bien défini en  $w$ . Alors, par définition,  $f^{-1}(w)$  est un antécédent de  $w$  par  $f$ . On a donc  $f \circ f^{-1}(w) = w$ . Avec l'abus de notation donné plus haut dans

l'énoncé, on a donc  $f \circ f^{-1} = \text{id}_{\mathbb{C}}$ .

Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $f^{-1} \circ f$  est bien défini en  $z$ . Alors,  $f^{-1}(f(z))$  est par définition un antécédent de  $f(z)$  par  $f$ . Or, on sait qu'il y a au plus un tel antécédent et  $z$  en est un. Donc,  $f^{-1}(f(z)) = z$  et donc  $f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{C}}$ .

## 2 Birapports

1. **Sens**  $(B) \implies (A)$ .

(a) On suppose que  $z_1, z_2, z_3$  et  $z_4$  sont alignés. Il existe donc  $u \in \mathbb{C}$  et des réels  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  tels que  $z_1 - z_3 = \alpha u$ ,  $z_1 - z_4 = \beta u$ ,  $z_2 - z_4 = \gamma u$  et  $z_2 - z_3 = \delta u$ .

$$\text{Alors } [z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta} \in \mathbb{R}.$$

(b) On suppose que  $z_1, z_2, z_3$  et  $z_4$  sont cocycliques. Notons  $\omega$  le cercle du centre qui les contient,  $R$  son rayon. On peut donc trouver des angles  $\theta_j$ , pour  $j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$  tels que

$$\forall j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, z_j = \omega + Re^{i\theta_j}.$$

Alors,

$$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{(\omega + Re^{i\theta_1}) - (\omega + Re^{i\theta_3})}{(\omega + Re^{i\theta_1}) - (\omega + Re^{i\theta_4})} \times \frac{(\omega + Re^{i\theta_2}) - (\omega + Re^{i\theta_4})}{(\omega + Re^{i\theta_2}) - (\omega + Re^{i\theta_3})}.$$

D'où

$$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{e^{i\theta_1} - e^{i\theta_3}}{e^{i\theta_1} - e^{i\theta_4}} \times \frac{e^{i\theta_2} - e^{i\theta_4}}{e^{i\theta_2} - e^{i\theta_3}} = \frac{\cos(\frac{\theta_1 - \theta_3}{2})}{\cos(\frac{\theta_1 - \theta_4}{2})} \times \frac{\cos(\frac{\theta_2 - \theta_4}{2})}{\cos(\frac{\theta_2 - \theta_3}{2})} \in \mathbb{R},$$

par la méthode de l'angle moitié.

2. **Des homographies envoyant le cercle unité sur l'axe réel.**

(a) Soit  $z \in \mathbb{C} - \{1\}$ . On calcule :

$$f(z) = i \left( \frac{(1+z)(1-\bar{z})}{|1-z|^2} \right) = i \left( \frac{1+2i\text{Im}z - |z|^2}{|1-z|^2} \right).$$

Ainsi  $\text{Im}f(z) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ . On en déduit que

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff \text{Im}f(z) = 0 \iff |z|^2 = 1 \iff z \in \mathbb{U}.$$

(b) Notons  $f_\theta : z \mapsto i \left( \frac{1 + e^{-i\theta}z}{1 - e^{-i\theta}z} \right)$ . L'homographie  $f_\theta$  a pour pôle  $e^{i\theta}$ . Soit  $z \in \mathbb{C} - \{e^{i\theta}\}$ . On a  $f_\theta(z) = f(e^{-i\theta}z)$ , donc le calcul précédent montre que

$$f_\theta(z) \in \mathbb{R} \iff e^{-i\theta}z \in \mathbb{U} \iff z \in \mathbb{U}.$$

(c) Soient  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} - \{1\}$ . On calcule :

$$\begin{aligned}
& [f(z_1) : f(z_2) : f(z_3) : f(z_4)] \\
&= \frac{i \left( \frac{1+z_1}{1-z_1} \right) - i \left( \frac{1+z_3}{1-z_3} \right)}{i \left( \frac{1+z_1}{1-z_1} \right) - i \left( \frac{1+z_4}{1-z_4} \right)} \times \frac{i \left( \frac{1+z_2}{1-z_2} \right) - i \left( \frac{1+z_4}{1-z_4} \right)}{i \left( \frac{1+z_2}{1-z_2} \right) - i \left( \frac{1+z_3}{1-z_3} \right)} \\
&= \frac{\left(1 + \frac{2}{1-z_1}\right) - \left(1 + \frac{2}{1-z_3}\right)}{\left(1 + \frac{2}{1-z_1}\right) - \left(1 + \frac{2}{1-z_4}\right)} \times \frac{\left(1 + \frac{2}{1-z_2}\right) - \left(1 + \frac{2}{1-z_4}\right)}{\left(1 + \frac{2}{1-z_2}\right) - \left(1 + \frac{2}{1-z_3}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{1-z_1} - \frac{1}{1-z_3}}{\frac{1}{1-z_1} - \frac{1}{1-z_4}} \times \frac{\frac{1}{1-z_2} - \frac{1}{1-z_4}}{\frac{1}{1-z_2} - \frac{1}{1-z_3}} \\
&= \frac{(1-z_3)(1-z_4) - (1-z_1)(1-z_4)}{(1-z_3)(1-z_4) - (1-z_1)(1-z_3)} \times \frac{(1-z_4)(1-z_3) - (1-z_2)(1-z_3)}{(1-z_3)(1-z_4) - (1-z_2)(1-z_4)} \\
&= \frac{(1-z_3) - (1-z_1)}{(1-z_4) - (1-z_1)} \times \frac{(1-z_4) - (1-z_2)}{(1-z_3) - (1-z_2)} \\
&= \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \times \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \\
&= [z_1 : z_2 : z_3 : z_4]
\end{aligned}$$

Ceci prouve le résultat pour  $\theta = 0$ . Soient alors  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} - \{e^{i\theta}\}$ . On a

$$\begin{aligned}
[f_\theta(z_1) : f_\theta(z_2) : f_\theta(z_3) : f_\theta(z_4)] &= [f(e^{-i\theta_1}) : f(e^{-i\theta_2}) : f(e^{-i\theta_3}) : f(e^{-i\theta_4})] \\
&= [e^{-i\theta} z_1 : e^{-i\theta} z_2 : e^{-i\theta} z_3 : e^{-i\theta} z_4] \\
&= [z_1 : z_2 : z_3 : z_4],
\end{aligned}$$

la dernière égalité étant immédiate.

3. **Sens (A)  $\implies$  (B).** Soient  $z_1, z_2, z_3, z_4$  des nombres complexes deux à deux distincts.

(a) On suppose  $z_1, z_2, z_3$  alignés. Il existe donc  $u \in \mathbb{C}$  et des réels  $\alpha, \beta$  tels que  $z_1 - z_3 = \alpha u$  et  $z_2 - z_3 = \beta u$ . On calcule

$$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{\alpha u}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{\beta u} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}.$$

Ainsi, si le birapport  $[z_1 : z_2 : z_3 : z_4]$  est réel, le rapport  $\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}$  l'est aussi. Par le cours, cela implique que  $z_1, z_2, z_4$  sont alignés. Finalement, les 4 points sont alignés.

(b) Notons  $\omega$  le centre de  $\mathcal{C}$  et  $r > 0$  son rayon. La similitude  $h : w \mapsto \frac{w - \omega}{r}$  est telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, z \in \mathcal{C} \iff h(z) \in \mathbb{U}.$$

Si  $\theta$  est un réel quelconque tel que  $e^{i\theta}$  est distinct des images  $h(z_1), h(z_2), h(z_3)$  et  $h(z_4)$ , on a donc, en utilisant les homographies  $f_\theta$  précédentes, pour tout  $z$  différent du pôle  $p$  de  $f_\theta \circ h$  :

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{p\}, z \in \mathcal{C} \iff f_\theta \circ h(z) \in \mathbb{R}.$$

(c) En particulier, montrer que  $z_4$  est sur  $\mathcal{C}$  est équivalent à montrer que  $f_\theta \circ h(z_4)$  est réel.  
Or,

$$[f_\theta \circ h(z_1) : f_\theta \circ h(z_2) : f_\theta \circ h(z_3) : f_\theta \circ h(z_4)] = [h(z_1) : h(z_2) : h(z_3) : h(z_4)] = [z_1 : z_2 : z_3 : z_4] \in \mathbb{R}.$$

La première égalité vient du fait qu'on a montré que  $f_\theta$  préserve le birapport ; la deuxième vient du fait analogue pour la similitude  $h$  (calcul immédiat).

Ainsi, les images  $f_\theta \circ h(z_i)$  sont alignées. Comme les 3 premières sont réelles, la 4ème aussi. Donc,  $f_\theta \circ h(z_4)$  est réel ; et donc  $z_4 \in \mathcal{C}$ .

4. Commençons par éliminer les  $z$  pour lesquels  $1, z, 1-z$  et  $\frac{1}{z}$  ne sont pas deux à deux distincts. Pour que 1 ne soit pas l'un des autres, on doit avoir  $z \neq 1$  et  $z \neq 0$ . Pour que  $z$  ne soit pas  $1-z$ , on doit avoir  $z \neq 1/2$ . Pour que  $z$  ne soit pas  $\frac{1}{z}$ , on doit avoir  $z \neq -1$  (et 1 déjà dit). Enfin, pour que  $1-z$  ne soit pas  $\frac{1}{z}$ , on doit avoir après calculs  $z \neq e^{\pm i\pi/3}$ .

Soit donc  $z \in \mathbb{C} - \{0, 1, -1, 1/2, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}\}$ . Supposons que les points  $1, z, 1-z$  et  $\frac{1}{z}$  sont cocycliques. Alors, le birapport  $[1 : z : \frac{1}{z} : 1-z]$  est réel. Après calculs, ce birapport  $B(z)$  vaut  $\frac{2z-1}{z(z+1)}$ .

On écrit  $z = x + iy$ , avec  $x, y \in \mathbb{R}$ . Comme  $B(z) = \frac{(2z-1)\bar{z}(\bar{z}+1)}{|z|^2|z+1|^2}$ ,  $B(z)$  est réel ssi la partie imaginaire de  $(2z-1)\bar{z}(\bar{z}+1)$  est nulle. On calcule :

$$\begin{aligned} (2z-1)\bar{z}(\bar{z}+1) &= (2x+2iy-1)(x-iy)(x+1-iy) \\ &= (2x+2iy-1)(x(x+1)-y^2+i(-2xy-y)) \\ &= K + i\left((2y)(x(x+1)-y^2) - y(2x-1)(2x+1)\right) \end{aligned}$$

où  $K$  est un réel, qu'on ne calcule pas. Ainsi,  $B(z)$  est réel ssi  $y\left(2(x(x+1)-y^2) - (2x-1)(2x+1)\right)$

est nul ssi  $y = 0$  ou  $2x^2 + 2x - 2y^2 - 4x^2 + 1 = 0$

ssi  $y = 0$  ou  $2x^2 - 2x + 2y^2 = 1$

ssi  $y = 0$  ou  $(x-1/2)^2 + y^2 = 3/4$ .

Ainsi,  $B(z)$  est réel ssi  $y = 0$  ou  $(x, y)$  est sur le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $(1/2, 0)$  et de rayon  $\sqrt{3}/2$ .

Réciproquement, le cas  $y$  réel correspond à des points  $1, z, 1-z$  et  $\frac{1}{z}$  alignés (sur l'axe des abscisses). Supposons maintenant que  $z \in \mathcal{C}$ . Alors  $1-z$  aussi (c'est le symétrique de  $z$  par la symétrie centrale de centre  $(1/2, 0)$ ). Donc, les points  $z, 1/z$  et  $1/2$  sont alignés. Si 1 est aussi aligné avec  $z$  et  $1/z$ , on en déduit donc que  $z$  est réel, ce qui concerne uniquement les deux points  $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$  de  $\mathcal{C}$ .

**Bilan :** les points  $1, z, \frac{1}{z}$  et  $1-z$  sont cocycliques (deux à deux distincts) ssi  $z$  est sur le cercle

$\mathcal{C}$  de centre  $(1/2, 0)$  et de rayon  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $z$  est distinct de  $e^{\pm i\pi/3}$  et de  $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ .

### 3 Homographies préservant le disque unité

1. Soient  $f$  et  $g$  deux homographies dans  $K$ . On sait que  $g \circ f$  et  $f^{-1}$  sont des homographies. De plus, des égalités  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$  et  $g(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ , on déduit que  $g \circ f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$  et  $f^{-1}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ . Donc

$g \circ f$  et  $f^{-1}$  sont dans  $K$ .

2. Soit  $\alpha \in \mathbb{D} - \{0\}$  (pour  $\alpha = 0$ ,  $f_0$  est l'identité et tout est clair). L'homographie  $f_\alpha$  a pour pôle  $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ , de module  $\frac{1}{|\alpha|} > 1$ . Donc son pôle est hors de  $\mathbb{D}$ . De plus, on a manifestement  $f_\alpha(\alpha) = 0$ .

Soit  $z \in \mathbb{D}$ . On a  $|z - \alpha|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{\alpha}z) + |\alpha|^2$  et  $|1 - \bar{\alpha}z|^2 = 1 - 2\operatorname{Re}(\bar{\alpha}z) + |\alpha|^2|z|^2$ . Comme  $|z| < 1$  et  $|\alpha| < 1$ , on a :

$$(1 - |z|^2)(1 - |\alpha|^2) \geq 0,$$

d'où en développant  $|z|^2 + |\alpha|^2 < 1 + |\alpha|^2|z|^2$ . On en déduit que  $|z - \alpha|^2 < |1 - \bar{\alpha}z|^2$ , puis finalement que  $|f_\alpha(z)| < 1$ . Donc  $f_\alpha(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ .

Par les calculs de l'exercice 1,  $f_\alpha^{-1} : z \mapsto \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha}z}$ . Donc  $f_\alpha^{-1} = f_{-\alpha}$  et l'argument précédent montre que  $f_\alpha^{-1}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . Donc  $\mathbb{D} \subset f_\alpha(\mathbb{D})$ .

Finalement, on a montré que  $f_\alpha(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ .

3. (a) Comme  $f$  est une homographie, il existe des complexes  $a, b, c, d$  tels que  $ad - bc \neq 0$  et pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ .

L'hypothèse  $f(0) = 0$  donne  $b = 0$ . Donc  $d \neq 0$  et en divisant par  $d$ , on a, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $f(z) = \frac{\alpha z}{\beta z + 1}$ , en posant  $\alpha = a/d$  et  $\beta = b/d$ .

(b)  $f^{-1}$  est donnée par  $z \mapsto \frac{z}{-\beta z + \alpha}$ .

- (c) Comme  $f$  n'a pas de pôle dans  $\mathbb{D}$ , le dénominateur  $\beta z + 1$  ne doit pas s'annuler pour  $z \in \mathbb{D}$ . Donc  $\beta^{-1} \notin \mathbb{D}$ , ce qui est équivalent à  $|\beta| \leq 1$ .

De même, le dénominateur  $-\beta z + \alpha$  dans l'expression de  $f^{-1}$  ne doit pas s'annuler pour  $z \in \mathbb{D}$ . On obtient donc (si  $\beta \neq 0$ )  $-\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{D}$ , ce qui donne  $|\beta| \leq |\alpha|$  (inégalité aussi valable si  $\beta = 0$ ).

- (d) La première inégalité est une traduction de  $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . La deuxième de  $f^{-1}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ .

- (e) Écrivons  $\beta = re^{i\theta}$  et  $\alpha = Re^{i\phi}$ , avec  $r, R \in [0, 1[$  et  $\theta, \phi \in [0, 2\pi[$ . Soit  $t \in [0, 1[$ . Pour  $z = -te^{-i\theta} \in \mathbb{D}$ , on a  $|\beta z + 1| = |1 - rt| = 1 - rt = 1 - |\beta|t$ . On a utilisé que  $1 - rt \geq 0$ , puisque  $r$  et  $t$  sont inférieurs à 1. Donc, en substituant  $z$  dans la première inégalité de la question précédente, on obtient

$$|\alpha|t < 1 - |\beta|t.$$

On pose maintenant  $z = te^{i(\phi - \theta)} \in \mathbb{D}$ . On a  $-\beta z + \alpha = (R - tr)e^{i\theta}$ , de module  $R - tr = |\alpha| - t|\beta|$  (car  $|\beta| \leq |\alpha|$ ). En substituant  $z$  dans la deuxième inégalité de la question précédente, il vient donc :

$$t < |\alpha| - |\beta|t.$$

- (f) Les inégalité de la question précédentes sont valables pour tout  $t \in [0, 1[$ . En faisant tendre  $t$  vers 1, on obtient :

$$|\alpha| \leq 1 - |\beta| \text{ et } 1 \leq |\alpha| - |\beta|.$$

On a donc la chaîne d'inégalités suivante :

$$1 - |\beta| \leq 1 + |\beta| \leq |\alpha| \leq 1 - |\beta|.$$

Ce n'est possible que si toutes ces inégalités sont des égalités. Ce qui implique  $|\alpha| = 1$  et  $|\beta| = 0$ . En écrivant  $\alpha = e^{i\theta}$ , on a donc  $f : z \mapsto e^{i\theta} z$ .

4. Soit  $f \in K$ . Notons  $\alpha = f(0)$  et posons  $g = f_\alpha \circ f$ . Alors  $g \in K$  et  $g(0) = f_\alpha(\alpha) = 0$ . D'après la question précédente, il existe donc  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $g : z \mapsto e^{i\theta} z$ .

Comme  $f = (f_\alpha)^{-1} \circ g = f_{-\alpha} \circ g$ , on en déduit que  $f$  est de la forme :

$$f : z \mapsto \frac{e^{i\theta} z + \alpha}{1 + \overline{\alpha} e^{i\theta} z},$$

avec  $\alpha \in \mathbb{D}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Réciproquement, les homographies de cette forme sont des éléments de  $K$ , puisqu'elles sont obtenues comme composées de  $f_{-\alpha}$  et de  $g : z \mapsto e^{i\theta} z$ , qui sont bien des éléments de  $K$ .