Fonctions et calcul différentiel

1 Généralités

Exercice 1. ◐○○ – *Étude de parité*

Étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$;
2. $f_2(x) = \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$;
3. $f_3(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$.

Exercice 2. ●○○ – *Étude de fonctions*

Étudier les fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x}\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$;
2. $f_2(x) = x^{-\ln x}$;
3. $f_3(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$;
4. $f_4(x) = \sqrt{\dfrac{|\ln(x)|}{x}}$.

Exercice 3. ●○○ – *$f \circ f$ croissante et $f \circ f \circ f$ décroissante*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 4. ♣ – ●◐○ – *Une fonction avec beaucoup de périodes*

Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non constante, admettant des périodes strictement positives arbitrairement petites.

2 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Exercice 5. ○○○ – $\sin(nx)$

Montrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n, $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$.

Exercice 6. ♣ – ●◐○ – *Fonctions trigonométriques et réciproques*

Déterminer l'ensemble de définition et simplifier les expressions suivantes :

1. $\sin(\arccos x)$;
2. $\sin(\arctan x)$;
3. $\arccos\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}\right)$;
4. $\cos(2\arcsin x)$;
5. $\cos(2\arctan x)$;
6. $\cos\left(\dfrac{\arcsin x}{2}\right)$;
7. $\tan(\arcsin x)$;
8. $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$;
9. $\arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$.

Exercice 7. ◐○○ – *Formules d'addition en trigonométrie hyperbolique*

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Proposer et démontrer des formules pour $\mathrm{ch}(x+y)$, $\mathrm{sh}(x+y)$ et $\mathrm{th}(x+y)$.

Exercice 8. ♣ – ●○○ – *Somme de fonctions hyperboliques*

Soient a, b deux réels. Simplifier $C_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(a+kb)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(a+kb)$.

Exercice 9. ♣ – ●◐○ – *Formule de Machin*

1. Montrer que $\dfrac{(5+i)^4}{239+i} = 2(1+i)$.
2. En déduire que $4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$.
3. Montrer l'égalité $4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 10. ♣ – ●●○ – *Formule d'addition des arctangentes*

Soient x et y deux réels tels que $xy \neq 1$.

1. Montrer que
$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + k\pi,$$
où
$$k = \begin{cases} 0 & \text{si } xy < 1 \\ 1 & \text{si } xy > 1, x > 0 \\ -1 & \text{si } xy > 1, x < 0 \end{cases}$$
2. Utiliser cette formule pour redémontrer la formule de Machin.

Exercice 11. ●○○ – *Une somme d'arctangentes*

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right).$$
2. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\dfrac{1}{p^2+p+1}\right)$.

Exercice 12. ♣ – ●●○ – *Parmi 7 réels...*

On se donne 7 réels $x_1, \ldots, x_7$. Montrer qu'on peut trouver deux indices $1 \leq i \neq j \leq 7$ tels que
$$0 \leq \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3 Fonctions exponentielle et logarithme

Exercice 13. ◐○○ – *Une équation avec des puissances*

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$$

Exercice 14. ◐○○ – *Un produit infini*

1. Montrer que $\forall x > 0, x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire la limite de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 15. ●◐○ – *L'exponentielle, comme somme d'une série*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'encadrement suivant :
$$\forall x \in [0, n], \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq e^x \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}.$$
2. Montrer que pour tout réel x,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$
3. En déduire la formule :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Exercice 16. ♣ – ●◐○ – *Irrationalité de e*

Le but de l'exercice est de montrer que e est irrationnel. On rappelle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier naturel a_n tel que
$$a_n < n!e < a_n + 1.$$
2. Conclure.

Exercice 17. ●○○ – *Irrationalité de* $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$

Montrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel. Généraliser.

Exercice 18. ●○○ – *Étude de* $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

On définit f sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Faire l'étude de f.
2. En déduire les couples $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, solutions de $a^b = b^a$.
3. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de solutions de l'équation $e^x = x^n$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
4. Déterminer la valeur maximale de $\sqrt[n]{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 19. ♣ – ●●○ – *Inégalités de Young et Hölder*

Soit $p > 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $q > 1$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
   On dit que q est l'exposant conjugué de p.

On fixe un tel couple $(p, q) \in]1, +\infty[^2$.

2. Montrer l'inégalité de Young :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$
3. Montrer l'inégalité de Hölder :
$$\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}, \left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}.$$

4 Calcul différentiel

Exercice 20. ○○○ – *Calcul de dérivées*

Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes. Puis calculer les dérivées :

1. $f_1(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 + 1}$;
2. $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{(\cos x + 2)^4}$;
3. $f_3(x) = e^{-\frac{2}{x^2}}$;
4. $f_4(x) = \ln\left(2 + \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$;
5. $f_5(x) = \ln\Big(\ln\big(\ln x\big)\Big)$;
6. $f_6(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} + 1}\right)$;
7. $f_7(x) = x^{1/x}$;
8. $f_8(x) = \operatorname{ch} x \cos x + \operatorname{sh} x \sin x$.

Exercice 21. ♣ – ●◐○ – *Dérivées successives*

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x-a}$, où $a \in \mathbb{C}$;
2. $f_2(x) = \cos(3x)$;
3. $f_3(x) = x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. $f_4(x) = e^x \cos x$;
5. $f_5(x) = \cos^3 x$;
6. $f_6(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Exercice 22. ●●○ – *Dérivées successives de* arctan

On pose $f = \arctan$. Montrer que f est indéfiniment dérivable et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n\big(f(x)\big)\sin\Big(n\big(\pi/2 + f(x)\big)\Big).$$

Exercice 23. ♣ – ●●◐ – tan *est absolument monotone*

Une fonction est dite absolument monotone si elle est indéfiniment dérivable et que toutes ses dérivées sont positives. Montrer que tan est absolument monotone sur $[0,\pi/2[$.

Indications

Exercice 4. On pourra utiliser la densité des rationnels.

Exercice 6. Utiliser le formulaire de trigonométrie pour faire apparaître des composées d'une fonction et de sa bijection réciproque. On ne dérivera qu'en dernier recours.

Exercice 8. Considérer $C_n \pm S_n$.

Exercice 10. Poser $u = \arctan x$ et $v = \arctan y$ et utiliser la formule d'addition de tangente. La valeur de k est obtenue par une disjonction de cas portant sur la valeur de $u+v$.

Exercice 12. Écrire les réels comme des tangentes d'angles.

Exercice 15. Pour 1., considérer les fonctions $f_n : x \mapsto e^{-x}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ et $g_n : x \mapsto e^{-x}\Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \frac{x_n}{n!}\Big)$.

Exercice 17. On utilisera les résultats élémentaires d'arithmétique.

Exercice 19. Pour 3., on commencera par montrer l'inégalité dans le cas particulier où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p = \sum_{k=1}^{n}|y_k|^p = 1$. Puis, on s'y ramènera en homogénéisant la formule à démontrer.

Exercice 21. Pour les calculs avec fonctions trigonométriques, on pourra penser complexes et linéarisation. Pour 6., factoriser x^2+1 en passant en complexe et décomposer la fraction.

Exercice 23. Calculer les premières dérivées et établir par récurrence la forme générale des dérivées supérieures.