DM 4 - Fonctions absolument monotones

1 Généralités

1. Si f est absolument monotone, elle est positive en appliquant la définition pour $n = 0$. De plus, sa dérivée est positive, en appliquant la définition pour $n = 1$. Donc, f est croissante.

2. Par récurrence. Sera fait plus tard en cours.

3. Soient f et g deux fonctions absolument monotones sur I. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in I$. Alors,

$$(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \geq 0$$

car $f^{(n)}(x)$ et $g^{(n)}(x)$ sont positifs par hypothèse. Donc $f+g$ est absolument monotone.

De plus,

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Tous les termes dans la somme sont positifs par hypothèse, donc fg est absolument monotone.

4. Soit f une fonction absolument monotone. Considérons pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: $\Big(\exp(f)\Big)^{(n)} \geq 0$. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$, par récurrence forte.

   - Initialisation : pour $n = 0$, $\exp(f)$ est bien une fonction positive.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \leq n$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie. On a $\exp(f)' = f' \exp(f)$. Donc :

   $$\Big(\exp(f)\Big)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} \Big(\exp(f)\Big)^{(n-k)}.$$

   Par hypothèse de récurrence, et comme f est absolument monotone, tous les termes sont positifs. Donc $\Big(\exp(f)\Big)^{(n+1)}$ est positive, ce qui conclut la récurrence.

   Ainsi, $\exp(f)$ est absolument monotone.

5. Il n'y a pas de réciproque : la fonction $f = \ln$ n'est pas absolument monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ (car sa dérivée seconde est négative), mais $g = \exp(f) : x \mapsto x$ est absolument monotone (g et g' sont positives et les dérivées $g^{(k)}$ sont nulles pour $k \geq 2$).

2 La fonction arcsinus est absolument monotone sur $]0,1[$.

6. Pour tout $x \in]0,1[$, on peut réécrire

$$g(x) = \frac{1}{2}\big((1-x)^{-1} - (1+x)^{-1}\big).$$

Par une récurrence rapide, on en déduit la formule suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,1[, g^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\Big(\prod_{i=1}^{n}(-i) \times (-1)^n (1-x)^{-1-n} - \prod_{i=1}^{n}(-i) \times (1+x)^{-1-n}\Big).$$

D'où, après simplifications :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,1[, g^{(n)}(x) = \frac{n!}{2}\Big(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+x)^{n+1}}\Big).$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in]0,1[$. On doit montrer que

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} \geq 0.$$

Si n est impair, on a une somme de termes positifs et l'inégalité est évidente.

Si n est pair, c'est équivalent à :

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} \geq \frac{1}{(1+x)^{n+1}}.$$

La fonction $y \mapsto \dfrac{1}{y^{n+1}}$ étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est encore équivalent à

$$1 - x \leq 1 + x,$$

ce qui est vrai car x est positif.

Donc g est absolument monotone.

8. Pour $x \in]0,1[$, $f'(x) = -\dfrac{1}{2} \times (-2x) \times \dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}} = \dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$. Donc,

$$\big(\ln(f)\big)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{1-x^2} = g(x).$$

D'après la question précédente, on a $\big(\ln(f)\big)'$ est donc absolument monotone. De plus, pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) \geq 1$ car $\sqrt{1-x^2} \geq 1$ et donc $\ln f \geq 0$. On en déduit que $\ln(f)$ est absolument monotone.

D'après la question 3, on en déduit que f est absolument monotone.

9. L'application f est la dérivée de Arcsin sur $]0,1[$. Comme Arcsin est positive sur $]0,1[$ et que f est absolument monotone, Arcsin est absolument monotone sur $]0,1[$.

3 Différences finies

10. On calcule :

$$\begin{aligned}\Delta_h^2(f)(x) &= \Delta_h(f)(x+h) - \Delta_h(f)(x)\\ &= \big(f(x+2h) - f(x+h)\big) - \big(f(x+h) - f(x)\big)\\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).\end{aligned}$$

11. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$ l'assertion selon laquelle la formule de l'énoncé est valide pour tous $x,h\in\mathbb{R}$. On la montre par récurrence.

- Pour $n=0$, soient $x,h\in\mathbb{R}$. Alors, $\Delta_h^0(f)(x)=f(x)$ et la somme de droite se simplifier aussi en $f(x)$.
- Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soient $x,h\in\mathbb{R}$. On calcule :

$$\begin{aligned}\Delta_h^{n+1}(f)(x) &= \Delta_h^n(f)(x+h)-\Delta_h^n(f)(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(x+h+kh)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(x+kh)\\ &= \sum_{\ell=1}^{n+1}(-1)^{n-\ell+1}\binom{n}{l-1}f(x+\ell h)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(x+kh)\\ &= f(x+(n+1)h)-f(x)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{(n+1-k)}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)f(x+kh)\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{(n+1)-k}\binom{n+1}{k}f(x+kh),\end{aligned}$$

par la relation de Pascal.

On remarquera que, comme on a besoin pour l'hérédité d'appliquer la formule en x et en $x+h$, il est important de ne pas travailler à x et h fixés. La formule de récurrence doit porter sur tous les $x,h\in\mathbb{R}$ en même temps. En revanche, on peut fixer f.

4 Absolument monotone $\implies$ totalement monotone

12. Soit $n\in\mathbb{N}$. On utilise la question 13 : pour tout $h\in\mathbb{R}$,

$$X_{n+1}(h)=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{k}f(x+kh).$$

Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, X_{n+1} est dérivable en h et :

$$X'_{n+1}(h)=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{k}\times k\times f'(x+kh).$$

Or, par la formule du chef, $k\binom{n+1}{k}=(n+1)\binom{n}{k-1}$ pour $k\in[\![0,n+1]\!]$ (pour $k=0$, les deux termes valent 0). Donc,

$$X'_{n+1}(h)=(n+1)\sum_{l=0}^{n}(-1)^{\ell}\binom{n}{l}f'(x+(\ell+1)h).$$

En utilisant de nouveau la question 13, on a donc :

$$X'_{n+1}(h)=(n+1)\Delta_h^n(f')(x+h).$$

13. D'après la question précédente, l'hypothèse $\Delta_h^n(f') \geq 0$ si $h > 0$ implique que, pour tout $h > 0$, $X'_{n+1}(h) \geq 0$. Dès lors, X_{n+1} est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or, $X_{n+1}(0) = \Delta_0^{n+1}(f)(x) = 0$. Donc, $X_{n+1}(h) \geq 0$ pour tout $h > 0$. Comme c'est vrai pour tout x, on a $\Delta_h^{n+1}(f) \geq 0$.

14. Soit f de classe $\mathscr{C}^\infty$. Une récurrence immédiate avec la question précédente montre que si $n, k \in \mathbb{N}$ et si $\Delta_h^n(f^{(k)}) \geq 0$ pour tout $h > 0$, alors $\Delta_h^{n+k}(f) \geq 0$, pour tout $h > 0$.

    Supposons f absolument monotone. Soit $k \in \mathbb{N}$. Avec $n = 0$, dans le résultat précédent, comme $\Delta_h^0(f^{(k)}) = f^{(k)} \geq 0$, on en déduit que $\Delta_h^k(f) \geq 0$. Donc, f est totalement monotone.

5 Totalement monotone $\Longrightarrow$ absolument monotone

15. Soit f totalement monotone. En appliquant la définition avec $n = 0$ et $n = 1$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0, \Delta_h^0(f)(x) = f(x) \geq 0$ et $\Delta_h^1(f)(x) = f(x+h) - f(x) \geq 0$.

    Ainsi, f est positive et croissante : en effet, la deuxième assertion est équivalente à
    $$\forall x < y, f(y) \geq f(x).$$

16. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in \mathbb{R}$, soit $h > 0$. On sait que
    $$\Delta_h^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+hk).$$
    On applique la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f, entre x et $x + hk$. Il existe donc $c_k \in]x, x+hk[$ tel que :
    $$f(x+hk) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(kh)^i}{i!} f^{(i)}(x) + \frac{(kh)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_k).$$
    On substitue et on intervertit les sommes :
    $$\Delta_h^n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(x) \Big(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^i \Big) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{(kh)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_k)$$
    D'après la question précédente, la somme $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^i$ vaut 0, sauf si $i = n$, où elle vaut $n!$. On a donc :
    $$\begin{aligned}\Delta_h^n(f)(x) &= h^n f^{(n)}(x) + \frac{(-1)^n h^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^{n+1} f^{(n+1)}(c_k) \\ &= h^n \Big(f^{(n)}(x) + h \times \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^{n+1} f^{(n+1)}(c_k) \Big).\end{aligned}$$
    Quand h tend vers 0^+, on affirme que la quantité entre parenthèses tend vers $f^{(n)}(x)$. En effet, quand h tend vers 0^+, $c_k \in]x, x+kh[$ tend vers x et donc la somme est bornée. Donc, le terme avec le h en facteur tend vers 0 quand h tend vers 0^+.

    On en déduit que $\lim_{h \to 0^+} \frac{\Delta_h^n(f)(x)}{h^n} = f^{(n)}(x)$. Et donc, par passage à la limite dans les inégalités, $f^{(n)}(x) \geq 0$ si pour tout $h > 0$, $\Delta_h^n(f)(x) \geq 0$.

    Donc, si f est totalement monotone, elle est absolument monotone.

17. Bonus.