DS 2 de mathématiques

Durée : 4 heures. Tout appareil électronique est interdit. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et à la rigueur du raisonnement.

Les cinq exercices sont indépendants.

Exercice 1. – *Technique*

1. Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x^2 - 8x + 17}{x^2 - 4x + 8}$, là où la fonction est définie.
2. Calculer $\displaystyle\int_3^4 \frac{\ln(\sqrt{t} - 1)}{\sqrt{t}} dt$.
3. Déterminer les solutions de $(1 + x)y' + y = 1 + \ln(1 + x)$ sur $]-1, +\infty[$.
4. Déterminer les solutions de $y'' + 2y' + y = \operatorname{sh} x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. – *Un autre calcul de* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P_n l'application polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P_n(x) = (x + i)^{2n+1} - (x - i)^{2n+1}.$$

1. Montrer qu'il existe une application polynomiale Q_n de degré n telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = Q_n(x^2).$$
2. On note $q_0, \dots, q_n$ les coefficients de Q_n, de sorte que $\forall x \in \mathbb{R}, Q_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q_k x^k$.
Déterminer q_n et q_{n-1}.
3. Montrer que P_n admet $2n$ racines réelles distinctes.
On exprimera ces racines comme des cotangentes d'angles dans $]0, \pi[$.
4. En déduire que Q_n admet n racines réelles distinctes.

On admet que si un polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ de degré d a d racines distinctes $z_1, \dots, z_d$, alors $\sum_{k=1}^{d} z_k = -\frac{a_{d-1}}{a_d}$.

5. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{2n(2n-1)}{6}$.

6. Montrer que : $\forall x \in]0, \pi/2[, \operatorname{cotan}^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \operatorname{cotan}^2 x$.

7. En déduire la valeur de $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 3. – *Parties intégrales du plan*

Une partie A de $\mathbb{C}$ est dite *intégrale* si la distance entre deux points quelconques de A est un entier.

1. Donner un exemple de partie intégrale constituée de 3 points non alignés.

2. Donner un exemple de partie intégrale constituée de 4 points, tels que 3 quelconques de ces points ne sont pas alignés.

3. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Rappeler sans démonstration les formules exprimant $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de $u = \tan(\theta/2)$.

4. On note G l'ensemble des nombres complexes de module 1 dont la partie réelle et la partie imaginaire sont dans $\mathbb{Q}$. Déduire de la question précédente que G est infini.

5. On note $G' = \{z^2, z \in G\}$. Montrer que la distance entre deux points quelconques de G' est un nombre rationnel.

6. En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut construire une partie intégrale A_N formée de N points cocycliques.

Exercice 4. – *Irrationalité de π*

Dans cet exercice, on montre que π est un nombre irrationnel. On raisonne par l'absurde en supposant que $\pi = \frac{a}{b}$, avec $a, b \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$\forall x \in [0, \pi], f_n(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}.$$

1. **Étude des dérivées de f_n.**

   (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0, 2n]\!]$. Calculer les valeurs en 0 et en π de $g_n^{(k)}$ et $h_n^{(k)}$, où $g_n : x \mapsto x^n$ et $h_n : x \mapsto (a - bx)^n$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, $f_n^{(k)}$ prend des valeurs entières en 0 et π.

   On admettra la formule de Leibniz : si $N \in \mathbb{N}^*$ et si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^N$ sur un intervalle I, fg est une fonction de classe $\mathcal{C}^N$ et

$$\forall x \in I, \forall n \in [\![0, N]\!], (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

2. **Estimation d'une intégrale.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \displaystyle\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)dx$.

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la suite $\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.

   (b) En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_n \in]0, 1[$.

3. **Intégration par parties itérée et conclusion.**

   (a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$, soient $a < b$ deux réels, soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^N$ sur $[a, b]$. Montrer que

$$\int_a^b f^{(N)} g = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \left[f^{(N-k-1)}(x) g^{(k)}(x) \right]_{x=a}^{x=b} + (-1)^N \int_a^b f g^{(N)}.$$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \in \mathbb{Z}$.

   (c) Conclure.

Exercice 5. – *Intégrale de Dirichlet*

On note sinc la fonction *sinus cardinal*, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x > 0, \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

1. Montrer que sinc peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ – qu'on notera encore sinc.

On admet que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \operatorname{sinc}(t)dt$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$. On note $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}(t)dt$ cette limite. Le but de l'exercice est de déterminer sa valeur. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin x} dx \text{ et } K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{x} dx.$$

On prolonge les deux fonctions sous l'intégrale par $2n+1$ en 0 et on admet que ces prolongements sont continus.

2. **Calcul de J_n et K_n.**

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \not\equiv 0[\pi]$, on a

   $$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx) = \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin x}.$$

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \dfrac{\pi}{2}$.

   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}(t)dt$.

3. **Démonstration de $\lim\limits_{n\to+\infty} (J_n - K_n) = 0$.** On définit h sur $\mathbb{R}_+^*$ par

   $$\forall x > 0, h(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}.$$

   (a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a les inégalités

   $$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

   (b) En déduire que pour tout $x \in]0, \pi/2]$, $0 \leq h(x) \leq x/6$.
   En particulier, on peut prolonger h en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, en posant $h(0) = 0$.
   Attention ! l'inégalité de droite est fausse. Voir le corrigé.

   On fixe $\varepsilon \in]0, \pi/2[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

   $$I_{n,1} = \int_0^{\varepsilon} \sin\big((2n+1)x\big)h(x)dx \text{ et } I_{n,2} = \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \sin\big((2n+1)x\big)h(x)dx.$$

   On a donc, $J_n - K_n = I_{n,1} + I_{n,2}$.

   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|I_{n,1}| \leq \dfrac{\varepsilon^2}{12}$.

   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n,2} = 0$.
   On pourra procéder par intégration par parties et admettre le fait qu'une fonction continue sur un segment est bornée.

   (e) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\big|\lim\limits_{n\to+\infty} (J_n - K_n)\big| \leq \dfrac{\varepsilon^2}{12}$, puis que

   $$\lim_{n\to+\infty} (J_n - K_n) = 0.$$

4. Conclure.