Calcul intégral

1 Techniques de base

Exercice 1. ♣ – ◐○○ – *Calculs directs*

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$;
2. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x\sin(x^2+1)\,dx$;
3. $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2-2}\,dx$;
4. $\displaystyle\int_0^2 10^x\,dx$;
5. $\displaystyle\int_1^{\ln 2} x2^x\,dx$;
6. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx$;
7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln^4 x}{x}\,dx$;
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-5}$;
9. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$.

Exercice 2. ♣ – ●◐○ – *Changements de variable*

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sin^3 x \cos^3 x$;
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$;
3. $f_3(x) = \dfrac{1}{2+e^{-x}}$;
4. $f_4(x) = \dfrac{\ln(\ln x)}{x}$;
5. $f_5(x) = \tan^4 x$;
6. $f_6(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$;
7. $f_7(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$;
8. $f_8(x) = \sqrt{1+\sin x}$;
9. $f_9(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 3. ♣ – ●○○ – *Intégration par parties*

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 \ln x$;
2. $f_2(x) = x \arctan x$;
3. $f_3(x) = e^x \cos x$;
4. $f_4(x) = \ln^2 x$;
5. $f_5(x) = \ln^n x$ ($n \in \mathbb{N}$) ;
6. $f_6(x) = x^n e^x$ ($n \in \mathbb{N}$).

Exercice 4. ●◐○ – *Primitives de* $x \mapsto \dfrac{1}{x-\omega}$

Soit $\omega = a + ib$ un nombre complexe. Déterminer les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x-\omega}$.

Exercice 5. ●○○ – *Un calcul d'intégrale*

On pose $C = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\,dt$ et $S = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\,dt$.

1. Montrer que $C = S$.
2. En déduire la valeur de C et S.

Exercice 6. ●◐○ – *Bornes dépendant d'un paramètre*

Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et exprimer leur dérivée :

1. $f_1(x) = \int_{\cos x}^{e^x} \ln(t^2+1)\,dt$;
2. $f_2(x) = x\int_x^{x^2} e^{-u^2x^2+1}\,du.$

Exercice 7. ♣ – ●●○ – *Un changement de variable délicat*

Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}$.

2 Intégrales particulières

Exercice 8. ●○○ – *Orthogonalité des fonctions trigonométriques*

Déterminer, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, la valeur de

$$I_{p,q} = \int_0^{2\pi} \cos(pt)\cos(qt)\,dt.$$

Exercice 9. ♣ – ●◐○ – *Intégrales bêta*

Calculer, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt.$$

Exercice 10. ♣ – ●●○ – *Intégrales de Wallis - Calcul*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt.$$

1. Calculer W_0 et W_1.
2. A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre W_n et W_{n+2}.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2n+1} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$
4. En utilisant un changement de variable approprié, calculer d'une autre façon les intégrales W_{2n+1}, pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Quelle identité obtient-on ? *Bonus :* la montrer directement.

Exercice 11. ♣ – ●●○ – *Intégrales de Wallis - Étude asymptotique*

On garde les notations de l'exercice précédent.

1. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Montrer que $\dfrac{W_n}{W_{n+2}}$ tend vers 1 quand $n \to +\infty$.
3. En déduire que $\dfrac{W_n}{W_{n+1}}$ tend vers 1 quand $n \to +\infty$.
4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité $W_{2n}W_{2n+1}$. En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{W_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} = 1.$$

Exercice 12. ♣ – ●●○ – *Un calcul de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

On suppose connus les résultats sur les intégrales de Wallis. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \text{ et } J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer I_n en fonction d'une intégrale de Wallis.
2. En effectuant le changement de variable, $u = \arctan \dfrac{x}{\sqrt{n}}$ dans J_n, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} \cos^{2n-2} u\,du.$$
3. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = \sqrt{n}\left(W_{2n-2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^{2n-2} u\,du\right).$$
4. Montrer que la suite $\left(\sqrt{n}\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^{2n-2} u\,du\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
5. Déduire de l'étude asymptotique des intégrales de Wallis que
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$
6. Montrer que pour tout $x \in [0, \sqrt{n}]$, on a
$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$
7. En déduire la valeur de
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx.$$

Indications

Exercice 2. Pour 8., on pourra se contenter de chercher une primitive sur $[0,\pi/2[$. Pour 9., la fonction est définie sur $[-1,1]$. En chercher une primitive sur $]-1,1[$, avec le changement de variable $x = \arccos u$.

Exercice 3. Pour 5. et 6., conjecturer la formule en calculant les premiers cas.

Exercice 4. Multiplier par la quantité conjuguée pour se ramener à deux calculs d'intégrale.

Exercice 6. Pour la 2., on ne doit plus avoir de x sous l'intégrale.

Exercice 9. Déterminer des relations simples entre les $I_{p,q}$.

Exercice 10. Pour 2., écrire $\sin^{n+2}$ comme $\sin^n(1-\cos^2)$ et $\sin^n\cos^2$ comme $(\sin^n\cos)\cos$. Pour 3., le plus rapide est d'utiliser un produit téléscopique.

Exercice 12. Pour 4., majorer uniformément la valeur sous l'intégrale et utiliser un théorème de croissance comparée. Pour 6., utiliser que $e^x \geq 1 + x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.