DS 2 de mathématiques

Durée : 4 heures. Tout appareil électronique est interdit. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et à la rigueur du raisonnement.

Les cinq exercices sont indépendants.

Exercice 1. – *Technique*

1. Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x^2 - 8x + 17}{x^2 - 4x + 8}$, là où la fonction est définie.
2. Calculer $\displaystyle\int_3^4 \frac{\ln(\sqrt{t} - 1)}{\sqrt{t}} dt$.
3. Déterminer les solutions de $(1 + x)y' + y = 1 + \ln(1 + x)$ sur $]-1, +\infty[$.
4. Déterminer les solutions de $y'' + 2y' + y = \operatorname{sh} x$ sur $\mathbb{R}$.

Solution 1

1. Notons f cette fonction. Le discriminant du polynôme au dénominateur est strictement négatif, donc f est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a

$$f(x) = \frac{2(x^2 - 4x + 8) + 1}{x^2 - 4x + 8} = 2 + \frac{1}{(x - 2)^2 + 4}.$$

   On en déduit qu'une primitive est $F : x \mapsto 2x + \dfrac{1}{2} \arctan(\dfrac{x - 2}{2})$.

2. On pose $u = \sqrt{t}$. Donc $du = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$. Ainsi, l'intégrale I vaut

$$I = \int_{\sqrt{3}}^{2} 2 \ln(u - 1) du = 2 \int_{\sqrt{3}-1}^{1} \ln(v) dv,$$

   avec un nouveau changement de variable $v = u - 1$. Donc,

$$I = 2[v \ln v - v]_{\sqrt{3}-1}^{1} = -2(\sqrt{3} - 1) \ln(\sqrt{3} - 1) + 2\sqrt{3} - 4.$$

3. L'équation homogène peut être écrite sous la forme
$$y' + \frac{1}{1+x}y = 0.$$
Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $]-1, +\infty[$ est $x \mapsto \ln(1+x)$. Donc, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto C\exp(-\ln(1+x)) = \dfrac{C}{1+x}$, où C est un réel.
On cherche une solution de l'équation différentielle sous la forme $y : x \mapsto \dfrac{C(x)}{1+x}$. y est solution ssi
$$\forall x > -1, (1+x)(\frac{C'(x)}{1+x} - \frac{C(x)}{(1+x)^2}) + \frac{C(x)}{1+x} = 1 + \ln(1+x).$$
Cela est équivalent à :
$$\forall x > -1, C'(x) = 1 + \ln(1+x).$$
On prend $C(x) = (1+x)\ln(1+x)$. Une solution de l'équation est donc :
$$y : x \mapsto \ln(1+x).$$
Ainsi, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :
$$x \mapsto \ln(1+x) + \frac{C}{1+x},$$
avec $C \in \mathbb{R}$.

4. Le polynôme caractéristique associé à l'équation est $X^2 + 2X + 1$, ayant -1 comme racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme
$$x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-x},$$
avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Comme $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ sur $\mathbb{R}$, on résout d'abord l'équation avec second membre e^x, puis e^{-x}.
On cherche une solution de $y'' + 2y' + y = e^x$ sous la forme $y : x \mapsto ae^x$. On constate aisément que $a = 1/4$ convient. Une solution est $\dfrac{e^x}{4}$.
On cherche une solution de $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ sous la forme $y : x \mapsto P(x)e^{-x}$, où P est un polynôme de degré 2. On calcule $y'(x) = (P'(x) - P(x))e^{-x}$ et $y''(x) = (P''(x) - 2P'(x) + P(x))e^{-x}$ de sorte que y est solution ssi :
$$\forall x \in \mathbb{R}, P''(x) - 2P'(x) + P(x) + 2(P'(x) - P(x)) + P(x) = 1.$$

C'est-à-dire ssi $P''(x) = 1$, après simplification. On peut donc prendre $P(x) = \dfrac{x^2}{2}$.
Une solution est $\dfrac{x^2 e^{-x}}{2}$.
Par le principe de superposition, une solution de l'équation différentielle initiale est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^x}{4} - \dfrac{x^2 e^{-x}}{2}\right)$.
Bilan : les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{e^x}{8} + e^{-x}(-\frac{x^2}{4} + \mu x + \lambda),$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. – *Un autre calcul de* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P_n l'application polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P_n(x) = (x+i)^{2n+1} - (x-i)^{2n+1}.$$

1. Montrer qu'il existe une application polynomiale Q_n de degré n telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = Q_n(x^2).$$
2. On note $q_0, \ldots, q_n$ les coefficients de Q_n, de sorte que $\forall x \in \mathbb{R}, Q_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q_k x^k$.
Déterminer q_n et q_{n-1}.
3. Montrer que P_n admet $2n$ racines réelles distinctes.
On exprimera ces racines comme des cotangentes d'angles dans $]0, \pi[$.
4. En déduire que Q_n admet n racines réelles distinctes.

On admet que si un polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ de degré d a d racines distinctes $z_1, \ldots, z_d$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{d} z_k = -\frac{a_{d-1}}{a_d}$.

5. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{2n(2n-1)}{6}$.
6. Montrer que : $\forall x \in]0, \pi/2[, \text{cotan}^2 x < \dfrac{1}{x^2} < 1 + \text{cotan}^2 x$.
7. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Solution 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la formule du binôme de Newton, on a

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(x^k i^{2n+1-k} - x^k(-i)^{2n+1-k}\right).$$

Pour k impair, $2n+1-k$ est pair de sorte que $(-i)^{2n+1-k}$ vaut i^{2n+1-k}. Donc :

$$P_n(x) = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{2n+1} 2\binom{2n+1}{k} x^k i^{2n+1-k}.$$

Par le changement de variable $l = 2k$, on obtient :

$$P_n(x) = 2i\sum_{l=0}^{n} \binom{2n+1}{2l} x^{2l} i^{2(n-l)} = 2i\sum_{l=0}^{n} \binom{2n+1}{2l} x^{2l}(-1)^{n-l}.$$

En posant, pour tout x réel, $Q_n(x) = 2i\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} x^k(-1)^{n-k}$, on a bien

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q_n(x^2) = P_n(x).$$

2. On a $q_n = 2i\binom{2n+1}{2n} = 2i(2n+1)$ et

$$q_{n-1} = -2i\binom{2n+1}{2n-2} = -2i\binom{2n+1}{3} = -2i\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
P_n(x) = 0 &\iff (x+i)^{2n+1} = (x-i)^{2n+1} \\
&\iff \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{2n+1} = 1 \\
&\iff \exists k \in [\![0, 2n]\!], \frac{x+i}{x-i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \\
&\iff \exists k \in [\![1, 2n]\!], x = -i\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}} \\
&\iff \exists k \in [\![1, 2n]\!], x = -i\frac{e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}}{e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}}\frac{2\cos(\frac{k\pi}{2n+1})}{-2i\sin(\frac{k\pi}{2n+1})} \\
&\iff \exists k \in [\![1, 2n]\!], x = \operatorname{cotan}(\frac{k\pi}{2n+1}).
\end{aligned}$$

(*On passe de* $k \in [\![0, 2n]\!]$ *à* $k \in [\![1, 2n]\!]$ *car* $\dfrac{x+i}{x-i}$ *ne peut pas valoir* 1.)

Pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, notons $x_k = \text{cotan}(\dfrac{k\pi}{2n+1})$. Comme la fonction cotan est injective sur $]0, \pi[$, les x_k sont distincts. On a bien trouvé (les) $2n$ racines réelles distinctes de P_n.

4. Pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, on a avec les notations précédentes :

$$Q_n(x_k^2) = P_n(x_k) = 0.$$

Donc, les réels x_k^2 sont des racines réelles de Q_n. Cependant, des formules $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$ (valables pour $x \in \mathbb{R}$), on déduit aisément que $\text{cotan}(\pi - x) = -\text{cotan}\, x$ (là où la formule a un sens). Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\dfrac{k\pi}{2n+1} = \pi - \dfrac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}$. Donc, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$x_k^2 = x_{2n+1-k}^2.$$

Enfin, les réels $x_1^2, \ldots, x_n^2$ sont deux à deux distincts (car $x_1, \ldots, x_n$ sont deux à deux distincts et positifs).

Finalement, $x_1^2, \ldots, x_n^2$ sont (les) n racines réelles distinctes de Q_n.

5. On applique la relation donnée au polynôme Q_n. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = -\frac{q_{n-1}}{q_n}.$$

Or, $-\dfrac{q_{n-1}}{q_n} = \dfrac{2n(2n-1)}{6}$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2(\frac{k\pi}{2n+1}) = \frac{2n(2n-1)}{6}.$$

6. Soit $x \in]0, \pi/2[$. On commence par remarquer que les inégalités à prouver sont équivalentes à

$$\frac{1}{\tan^2 x} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Par décroissance stricte de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, cela revient à montrer :

$$\tan^2 x > x^2 > \sin^2 x.$$

Par croissance stricte de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, c'est encore équivalent à

$$\tan x > x > \sin x.$$

Sur $]0,\pi/2[$, on pose $f(x) = x - \tan x$ et $g(x) = x - \sin x$. On a, pour $x \in [0,\pi/2[$, $f'(x) = 1 - (1+\tan^2 x) \leq 0$ (et ne s'annule qu'en 0) et $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ (et ne s'annule qu'en 0). Donc, f est strictement décroissante sur $[0,\pi/2[$ et g y est strictement croissante.

Donc, pour tout $x \in]0,\pi/2[$,

$$f(x) < f(0) = 0 = g(0) < g(x).$$

Ce qui est équivalent à $\tan x > x > \sin x$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a $\dfrac{k\pi}{2n+1} \in]0,\pi/2[$. Donc, en sommant les inégalités précédentes entre 1 et n :

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} < 1 + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

En reportant les valeurs trouvées pour les sommes et en simplifiant :

$$\pi^2 \frac{2n(2n-1)}{6(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} + \pi^2 \frac{2n(2n-1)}{6(2n+1)^2}.$$

La fraction $\dfrac{2n(2n-1)}{6(2n+1)^2}$ tend vers $\dfrac{4}{6 \times 4} = \dfrac{1}{6}$ quand n tend vers l'infini.

Donc les membres de gauche et de droite tendent tous deux vers $\dfrac{\pi^2}{6}$. Par le théorème des gendarmes, on a donc

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 3. – *Parties intégrales du plan*

Une partie A de $\mathbb{C}$ est dite *intégrale* si la distance entre deux points quelconques de A est un entier.

1. Donner un exemple de partie intégrale constituée de 3 points non alignés.

2. Donner un exemple de partie intégrale constituée de 4 points, tels que 3 quelconques de ces points ne sont pas alignés.

3. Soit $\theta \in]-\pi,\pi[$. Rappeler sans démonstration les formules exprimant $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de $u = \tan(\theta/2)$.

4. On note G l'ensemble des nombres complexes de module 1 dont la partie réelle et la partie imaginaire sont dans $\mathbb{Q}$. Déduire de la question précédente que G est infini.

5. On note $G' = \{z^2, z \in G\}$. Montrer que la distance entre deux points quelconques de G' est un nombre rationnel.

6. En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut construire une partie intégrale A_N formée de N points cocycliques.

Solution 3

1. Un triangle équilatéral de côté 1 convient. Par exemple, celui formé par les points d'affixe 0, 1 et $e^{i\pi/3} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. On considère les 4 sommets d'un rectangle dont les longueurs des côtés sont 3 et 4. Chaque sommet a une distance à un autre sommet égal à 3, 4 ou à $\sqrt{3^2+4^2} = 5$, par le théorème de Pythagore.

3. On a $\cos\theta = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin\theta = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

4. Soit u un nombre rationnel. Le nombre complexe $z_u = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} + i\dfrac{2u}{1+u^2}$ est de module 1. On peut le voir directement ou bien, en utilisant la question précédente, en disant qu'il s'agit de $e^{i\theta}$, pour $\theta = 2\arctan u$.

   De plus, l'application $\psi : u \mapsto z_u$, définie de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{U}$ est injective. De nouveau, on peut le voir directement ou bien en utilisant la question précédente : soient $u, u' \in \mathbb{Q}$ tels que $z_u = z_{u'}$. On a donc $e^{2i\arctan u} = e^{2i\arctan u'}$. Donc les angles $2\arctan u$ et $2\arctan u'$ sont congrus modulo 2π. Comme ils appartiennent tous deux à $]-\pi,\pi[$, ils sont égaux. Donc $\arctan u = \arctan u'$ et finalement $u = u'$, par injectivité de arctan sur $\mathbb{R}$.

   Enfin, chaque point z_u a pour parties réelle et imaginaire des nombres rationnels (car une somme/un produit/un quotient de nombres rationnels est un nombre rationnel).

   Ainsi, ψ est à valeurs dans G. Comme c'est une injection et que $\mathbb{Q}$ est infini, G est infini.

5. Soient a et b deux éléments de G'. On peut donc trouver z et w dans G tels que $a = z^2$ et $b = w^2$. Comme z et w sont de module 1, on peut les écrire $e^{i\theta}$ et $e^{i\phi}$. Alors,
$$|a-b| = |z^2 - w^2| = |e^{2i\theta} - e^{2i\phi}| = 2|\sin(\theta-\phi)|,$$
   par la méthode de l'angle moitié.

   Or, $\sin(\theta-\phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) - \cos(\theta)\sin(\phi)$. Comme z et w sont dans G, les cosinus et sinus de θ et ϕ sont des nombres rationnels, donc $\sin(\theta-\phi)$ aussi. Ainsi, $|a-b|$ est un nombre rationnel.

6. Remarquons d'abord que G' est infini. En effet, un élément de G' ne peut s'écrire que de deux façons différentes sous la forme z^2, avec z dans G (car si deux nombres complexes ont même carré, ils sont égaux ou opposés). Comme G est infini, G' aussi.

   Soit $N \in \mathbb{N}$ et considérons N points $z_1, \dots, z_N$, deux à deux distincts dans G'. Les longueurs $|z_i - z_j|$ sont rationnelles ; notons $q_{i,j}$ le dénominateur (positif) de cette longueur, écrite sous forme irréductible (pour tous $i \neq j \in [\![1, N]\!]$). Considérons un entier q multiple de tous les $q_{i,j}$; par exemple, leur ppcm. Alors, les points $qz_1, \dots, qz_N$ sont N points cocycliques (ils ont tous module q) et les longueurs

$$|qz_i - qz_j| = q|z_i - z_j|$$

   sont entières par construction.

Exercice 4. – *Irrationalité de π*

Dans cet exercice, on montre que π est un nombre irrationnel. On raisonne par l'absurde en supposant que $\pi = \dfrac{a}{b}$, avec $a, b \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$\forall x \in [0, \pi], f_n(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}.$$

1. **Étude des dérivées de f_n.**
   (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0, 2n]\!]$. Calculer les valeurs en 0 et en π de $g_n^{(k)}$ et $h_n^{(k)}$, où $g_n : x \mapsto x^n$ et $h_n : x \mapsto (a - bx)^n$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, $f_n^{(k)}$ prend des valeurs entières en 0 et π.
   On admettra la formule de Leibniz : si $N \in \mathbb{N}^*$ et si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^N$ sur un intervalle I, fg est une fonction de classe $\mathcal{C}^N$ et

$$\forall x \in I, \forall n \in [\![0, N]\!], (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

2. **Estimation d'une intégrale.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \displaystyle\int_0^{\pi} f_n(x) \sin(x) dx$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la suite $\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
   (b) En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_n \in]0, 1[$.
3. **Intégration par parties itérée et conclusion.**

(a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$, soient $a < b$ deux réels, soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^N$ sur $[a, b]$. Montrer que

$$\int_a^b f^{(N)} g = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \left[f^{(N-k-1)}(x) g^{(k)}(x) \right]_{x=a}^{x=b} + (-1)^N \int_a^b f g^{(N)}.$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \in \mathbb{Z}$.

(c) Conclure.

Solution 4

1. (a) Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$. Une récurrence rapide permet d'affirmer que

$$g_n^{(k)} : x \mapsto \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \text{ et } h_n^{(k)} : x \mapsto (-b)^k \frac{n!}{(n-k)!} (a - bx)^{n-k}$$

si $k \leq n$. Et si $k > n$, alors $g_n^{(k)}$ et $h_n^{(k)}$ sont nulles. On en déduit :

- Si $k \in [\![0, n]\!]$, $g_n^{(k)}(0) = h_n^{(k)}(\pi) = 0$; $g_n^{(k)}(\pi) = \dfrac{n!}{(n-k)!} \pi^{n-k}$; $h_n^{(k)}(0) = \dfrac{n!}{(n-k)!} (-b)^k a^{n-k}$.
- Si $k = n$, $g_n^{(n)}(0) = g_n^{(n)}(\pi) = n!$ et $h_n^{(n)}(0) = h_n^{(n)}(\pi) = (-b)^n n!$
- Si $k > n$, $g_n^{(k)}$ et $h_n^{(k)}$ sont nulles.

(b) Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$. On applique la formule de Leibniz :

$$\forall x \in [0, \pi], f_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} g_n^{(l)}(x) h_n^{(k-l)}(x).$$

D'après la question précédente, toutes les dérivées de g_n sont nulles en 0, sauf $g_n^{(n)}(0) = n!$. Ainsi, si $k < n$, $f_n^{(k)}(0) = 0$. Et si $k \geq n$,

$$\begin{aligned} f_n^{(k)}(0) &= \frac{1}{n!} \binom{k}{n} g_n^{(n)}(0) h_n^{(k-n)}(0) \\ &= \frac{1}{n!} \binom{k}{n} n! \frac{n!}{(2n-k)!} (-b)^{k-n} a^{2n-k} \\ &= \binom{k}{n} \frac{n!}{(2n-k)!} (-b)^{k-n} a^{2n-k} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

De même, si $k < n$, $g_n^{(k)}(\pi) = 0$ et si $k \geq n$,

$$\begin{aligned}
f_n^{(k)}(\pi) &= \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} k \\ k-n \end{pmatrix} g_n^{(k-n)}(\pi) h_n^{(n)}(\pi) \\
&= \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} k \\ k-n \end{pmatrix} \frac{n!}{(2n-k)!}\pi^{2n-k}(-b)^n n! \\
&= \begin{pmatrix} k \\ k-n \end{pmatrix} \frac{n!}{(2n-k)!} a^{2n-k}(-1)^n b^{k-n} \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$\frac{x^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{x}{k}.$$
Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N \geq 2x$. Alors, pour tout $n \geq N$:
$$\frac{x^n}{n!} = \prod_{k=1}^{N-1} \frac{x}{k} \times \prod_{k=N}^{n} \frac{x}{k} \leq \prod_{k=1}^{N-1} \frac{x}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N+1}.$$
Ainsi, la suite positive $\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)$ est majorée par une suite géométrique de raison $1/2$: elle tend donc vers 0.

   (b) Par un calcul rapide de dérivée, on a que $x \mapsto x(a - bx)$ atteint son maximum en $x = \dfrac{a}{2b} = \pi/2$. Ainsi,
$$\forall x \in [0, \pi], 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{a\pi}{4}\right)^n.$$
Comme de plus, $0 \leq \sin \leq 1$ entre 0 et π, la propriété de croissance de l'intégrale donne :
$$0 \leq A_n \leq \int_0^{\pi} \left(\frac{a\pi}{4}\right)^n dx = \pi\left(\frac{a\pi}{4}\right)^n.$$
Par la question précédente et le théorème d'encadrement, on en déduit que (A_n) tend vers 0. En particulier, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_n \in]0, 1[$ (A_n est toujours strictement positive).

3. (a) On procède par intégration par parties successives : (en intégrant à gauche et en dérivant à droite)
$$\begin{aligned}
\int_a^b f^{(N)} g &= [f^{(N-1)}(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f^{(N-1)} g' \\
&= [f^{(N-1)}(x)g(x)]_a^b - [f^{(N-2)}(x)g'(x)]_a^b + \int_a^b f^{(N-2)} g'' \\
&= \cdots \\
\int_a^b f^{(N)} g &= \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k [f^{(N-k-1)}(x) g^{(k)}(x)]_a^b + (-1)^N \int_a^b f g^{(N)}.
\end{aligned}$$

Pour une rédaction plus propre : procéder par récurrence sur le nombre d'intégrations par parties réalisées.

(b) On applique la formule précédente avec les fonctions f_n, sin, entre 0 et π. On prend $N = 2n+1$ et on note h une fonction telle que $h^{(N)} = \sin$ (ainsi h est égal à $\pm\cos$ ou $\pm\sin$). On a donc :

$$A_n = \int_0^{\pi} H^{(N)}(x) f_n(x) dx$$
$$A_n = \sum_{k=0}^{N-1} [H^{(N-k-1)}(x) f_n^{(k)}(x)]_0^{\pi} + (-1)^N \int_0^{\pi} H(x) f_n^{(N)}(x) dx$$

Comme $N = 2n+1$ et que f_n est une fonction polynomiale de degré $2n$, l'intégrale de droite est nulle. De plus, on a montré que $f_n^{(k)}$ prenait des valeurs entières en 0 et π pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$. Comme chaque dérivée $H^{(N-k-1)}$ vaut $\pm\cos$ ou $\pm\sin$, chacune prend aussi des valeus entières en 0 et π. Donc, les crochets sont entiers.

Finalement, $A_n \in \mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) D'après la question précédente, A_n est entier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Mais d'après 2.b), il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_n \in]0,1[$. C'est absurde.

Donc π est irrationnel.

Exercice 5. – *Intégrale de Dirichlet*

On note sinc la fonction *sinus cardinal*, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x > 0, \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

1. Montrer que sinc peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ – qu'on notera encore sinc.

On admet que la fonction $x \mapsto \int_0^x \operatorname{sinc}(t)dt$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$. On note $\int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}(t)dt$ cette limite. Le but de l'exercice est de déterminer sa valeur. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin x} dx \text{ et } K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{x} dx.$$

On prolonge les deux fonctions sous l'intégrale par $2n+1$ *en* 0 *et on admet que ces prolongements sont continus.*

2. **Calcul de J_n et K_n.**

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \not\equiv 0[\pi]$, on a

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx) = \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin x}.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \dfrac{\pi}{2}$.

(c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{sinc}(t)dt$.

3. **Démonstration de $\lim\limits_{n\to+\infty}(J_n - K_n) = 0$.** On définit h sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x > 0, h(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}.$$

(a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a les inégalités

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

(b) En déduire que pour tout $x \in]0, \pi/2]$, $0 \leq h(x) \leq x/6$.
En particulier, on peut prolonger h en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, en posant $h(0) = 0$.
Attention ! l'inégalité de droite est fausse. Voir le corrigé.

On fixe $\varepsilon \in]0, \pi/2[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$I_{n,1} = \int_0^{\varepsilon} \sin\big((2n+1)x\big)h(x)dx \text{ et } I_{n,2} = \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \sin\big((2n+1)x\big)h(x)dx.$$

On a donc, $J_n - K_n = I_{n,1} + I_{n,2}$.

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|I_{n,1}| \leq \dfrac{\varepsilon^2}{12}$.

(d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n,2} = 0$.
On pourra procéder par intégration par parties et admettre le fait qu'une fonction continue sur un segment est bornée.

(e) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\big|\lim\limits_{n\to+\infty}(J_n - K_n)\big| \leq \dfrac{\varepsilon^2}{12}$, puis que

$$\lim_{n\to+\infty}(J_n - K_n) = 0.$$

4. Conclure.

Solution 5

1. On a $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \sin'(0) = 1$. Ainsi, en posant $\text{sinc}(0) = 1$, on obtient une fonction sur $\mathbb{R}_+$ continue.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \not\equiv 0[\pi]$. On calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx) &= \text{Re}(\sum_{k=1}^{n} e^{i2kx}) \\
&= \text{Re}(e^{2ix}\frac{e^{2inx}-1}{e^{2ix}-1}) \\
&= \text{Re}(e^{2ix}\frac{e^{inx} \times 2i\sin(nx)}{e^{ix} \times 2i\sin(x)}) \\
&= \frac{\cos((n+1)x)\sin(nx)}{\sin x}
\end{aligned}$$

D'où

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx) = \frac{\sin x + 2\cos((n+1)x)\sin(nx)}{\sin x}.$$

Comme $2\cos((n+1)x)\sin(nx) = -\sin((n+1-n)x) + \sin((n+1+n)x) = -\sin x + \sin((2n+1)x)$, on en déduit la formule annoncée.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc :

$$J_n = \int_0^{\pi/2} (1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx))dx = \pi/2 + \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi/2} \cos(2kx)dx.$$

Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2kx)dx = [\frac{1}{2k}\sin(2kx)]_0^{\pi/2} = 0.$$

Donc, $J_n = \pi/2$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait le changement de variable $t = (2n+1)x$ dans l'intégrale donnant K_n. On a $dt = (2n+1)dx$ et donc

$$K_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t}dt = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \text{sinc}(t)dt.$$

Comme $(2n+1)\pi/2$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on en déduit par composition de limite que

$$\lim_{n \to +\infty} K_n = \int_0^{+\infty} \text{sinc}(t)dt.$$

3. (a) On peut faire des études de fonctions mais il est plus rapide de procéder par intégrations successives. On part de l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \leq 1.$$

En intégrant entre 0 et x, pour $x \geq 0$, il vient

$$\int_0^x \cos t dt \leq \int_0^x 1 dt,$$

c'est-à-dire $\sin x \leq x$, pour $x \geq 0$. (inégalité de droite)
On intègre cette nouvelle inégalité entre 0 et $x \geq 0$:

$$\int_0^x \sin t dt \leq \int_0^x t dt,$$

d'où $1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$, pour $x \geq 0$.
On intègre une dernière fois entre 0 et $x \geq 0$:

$$\int_0^x (1 - \cos t) dt \leq \int_0^x \frac{t^2}{2} dt.$$

D'où $x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$. Ce qui est équivalent à l'inégalité (de gauche) souhaitée.

(b) L'inégalité de droite est fausse. On remplace l'énoncé par : Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in]0, \pi/2], 0 \leq h(x) \leq Cx.$$

Sur $[0, \pi/2]$, $0 \leq \sin x \leq x$, donc on obtient immédiatement que $h(x) \geq 0$ sur $]0, \pi/2]$. Pour l'autre inégalité, on utilise la question précédente pour dire que

$$h(x) \leq \frac{x^3/6}{x(x - x^3/6)} = \frac{x}{6 - x^2},$$

pour tout $x > 0$. Si $x \in [0, \pi/2]$, on a $x^2 \leq \pi^2/4$. D'où $6 - x^2 \geq 6 - \pi^2/4 > 0$. En posant $C = \frac{1}{6 - \pi^2/4}$, on a bien

$$\forall x \in]0, \pi/2], 0 \leq h(x) \leq Cx.$$

Dans la suite, on modifie les inégalités à montrer : les constantes $1/6$ et $1/12$ sont remplacées en C et $C/2$.

(c) Par inégalité triangulaire, on a :

$$|I_{n,1}| \leq \int_0^\varepsilon |\sin((2n+1)x)| h(x) dx \leq \int_0^\varepsilon 1 \times Cx dx = C\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

(d) Comme h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, \pi/2]$, on calcule par intégration par parties :

$$I_{n,2} = [-\frac{1}{2n+1}\cos((2n+1)x)h(x)]_{\varepsilon}^{\pi/2} + \frac{1}{2n+1}\int_{\varepsilon}^{\pi/2}\cos((2n+1)x)h'(x)dx.$$

Le crochet tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. De plus, si M est un majorant de $|h'|$ sur $[\varepsilon, \pi/2]$ (ce majorant existe car h' est bornée en tant que fonction continue sur un segment), on a

$$\Big|\int_{\varepsilon}^{\pi/2}\cos((2n+1)x)h'(x)dx\Big| \leq \int_{\varepsilon}^{\pi/2} 1 \times M \leq M\pi/2,$$

de sorte que l'intégrale, divisée par $2n+1$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n,2} = 0$.

(e) Déjà, on sait que les suites (J_n), (K_n) et $(I_{n,2})$ ont une limite quand n tend vers $+\infty$. Il en est donc de même de $(I_{n,1})$. On a

$$J_n - K_n = I_{n,1} + I_{n,2}.$$

En passant à la limite, $\lim\limits_n(J_n - K_n) = \lim\limits_n I_{n,1}$ car $\lim\limits_n I_{n,2} = 0$. Comme $|I_{n,1}| \leq \frac{C\varepsilon^2}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que $|\lim\limits_n I_{n,1}| \leq \frac{C\varepsilon^2}{2}$.
Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque dans l'inégalité précédente, on peut prendre la limite quand ε tend vers 0, ce qui donne :

$$|\lim_n(J_n - K_n)| \leq 0,$$

c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty}(J_n - K_n) = 0$.

4. D'après la question précédente, on a donc $\lim\limits_n J_n = \lim\limits_n K_n$. Or, (J_n) est une suite constante égale à $\pi/2$. Donc

$$\lim_n K_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{sinc}(t)dt = \pi/2.$$