Équations différentielles linéaires

En l'absence de précision, les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

1 Calculs d'application

Exercice 1. ♣ – ○○○ – *Ordre* 1*, équation homogène*

Résoudre :

1. $y' = xy$;
2. $y' = -\dfrac{x}{x^2-1}y$;
3. $y' = \dfrac{1}{x}y$.

Exercice 2. ♣ – ●○○ – *Ordre 1, équation générale*

Résoudre :

1. $y' - 2y = \sin(2x)$;
2. $y' + y = xe^{3x}\cos x$;
3. $y' = \dfrac{2}{x}y + \dfrac{x}{x-1}$;
4. $y' + y = \arctan(e^x)$;
5. $y' = \dfrac{1}{\tan x}y + \tan^2 x$;
6. $y' - \dfrac{1}{x\ln x}y = -\dfrac{1}{x^2\ln x}(\ln x + 1)$.

Exercice 3. ♣ – ◐○○ – *Ordre 2, coefficients constants, équation homogène*

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$;
2. $y'' + 2y' + 4y = 0$;
3. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Résoudre sur $\mathbb{C}$:

4. $y'' + 9y = 0$, avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = i$;
5. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Exercice 4. ♣ – ●○○ – *Ordre 2, coefficients constants, équation générale*

Résoudre :

1. $y'' + 2y' + 5y = \operatorname{ch} x$;
2. $y'' + y = \cos^3 x$;
3. $y'' - 7y' + 12y = xe^{3x}$;
4. $y'' - 7y' + 12y = e^{3x}\cos(3x)$;
5. $y'' + 9y = \cos(3x)$;
6. $y'' - 2y' + y = e^x\cos x$.

Exercice 5. ●○○ – *Phénomène de résonance*

Soit $\omega_0 > 0$. Donner suivant la valeur de $\omega > 0$ la solution de l'équation différentielle

$$y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega x)$$

telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

2 Exercices théoriques

Exercice 6. ♣ – ●○○ – *Solutions avec deux valeurs prescrites*

Soit $L > 0$. Pour quelles valeurs de $\omega > 0$ existe-t-il une solution y non nulle à l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$, telle que $y(0) = y(L) = 0$?

Exercice 7. ●○○ – *Une équation intégrale*

Déterminer les fonctions y continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, 2y(x) = 3x \displaystyle\int_0^x y(t)dt$.

Exercice 8. ●○○ – *Un système différentiel*

Montrer qu'il existe un unique couple (x, y) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ tel que $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, et $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) &= 4x(t) - 6y(t) \\ y'(t) &= x(t) - y(t) \end{cases}$.

Exercice 9. ●◐○ – *Équations différentielles non linéaires*

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $y' = y^2$;
2. $y' = 1 + y^2$;
3. $y' = y(y+1)$.

Exercice 10. ♣ – ●◐○ – *Presque des équations différentielles*

1. Déterminer les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = y(2-x)$.
2. Déterminer les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(-x) = -2(x+1)e^x$.
3. Déterminer les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(x) = y(0) + y(1)$.

Exercice 11. ♣ – ●◐○ – *Changement de variable*

On cherche à déterminer les fonctions y définies de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, solutions de l'équation différentielle

$$(E)\ x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0.$$

Si y est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction z sur $\mathbb{R}$ par $z : t \mapsto y(e^t)$.

1. A quelle condition nécessaire et suffisante sur z, y est-elle solution de (E) ?
2. En déduire les solutions de (E).

Exercice 12. ●◐○ – *Passage par les complexes*

On cherche les couples (x, y) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$(E)\ \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) & = x(t) - y(t) \\ y'(t) & = x(t) + y(t) \end{cases}$$

Si (x, y) est un couple de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, on pose $z : t \mapsto x(t) + i y(t)$.

1. Montrer que (x, y) est solution de (E) ssi z est solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, que l'on précisera.
2. Conclure.

Exercice 13. ♣ – ●●◐ – *Où est l'équation différentielle ?*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\lim\limits_{+\infty}(f + f') = 0$.
Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

Exercice 14. ●●◐ – *Changement de variable et raccordement*

On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$(E)\ x^4 y'' + 2x^3 y' - y = 0$$

sur $\mathbb{R}$. Soit I un intervalle ne contenant pas 0.

1. Montrer que y est une solution de (E) sur I ssi $z : x \mapsto y\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est solution d'une équation différentielle (E') que l'on précisera.
2. En déduire les solutions de (E) sur I.
3. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. ♣ – ●●○ – *Conditions pour solutions bornées*

Déterminer l'ensemble des couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ pour lesquels toutes les solutions à valeurs complexes de

$$y'' + \alpha y + \beta = 0$$

sont bornées.

Exercice 16. ♣ – ●●● – *Une inéquation différentielle*

Soit f une fonction deux fois dérivable, telle que f'' est continue. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) \geq 0.$$

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x + \pi) \geq 0.$$

Exercice 17. ●●● – *Une solution bornée et périodique*

Soit g une fonction continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une solution bornée à

$$y' - y = g$$

et que celle-ci est 2π-périodique.

Indications

Exercice 5. Il faudra distinguer le cas où $\omega = \omega_0$.

Exercice 7. Raisonner par analyse-synthèse. Si y est une solution, pourquoi est-elle dérivable ? Quelle équation différentielle vérifie-t-elle ?

Exercice 9. Pour 1., on pourra admettre que si y n'est pas identiquement nulle, alors elle ne s'annule pas. De même pour 3., on pourra admettre que si y n'est pas constante égale à 0 ou -1, elle ne prend jamais ces valeurs.

Exercice 10. Pour 1. et 2., dériver l'équation après avoir justifié. Pour 3., raisonner par analyse-synthèse.

Exercice 13. En notant $g = f + f'$, f est solution de l'équation différentielle $y + y' = g$, donc s'exprime en fonction de g. On aura besoin de la définition rigoureuse de limite.

Exercice 15. Distinguer selon que le polynôme caractéristique a une ou deux racines.

Exercice 16. A x fixé, considérer $g(t) = f(t)\cos(x - t)$.

Exercice 17. La variation de la constante donne la forme d'une solution f. Évaluer f en les multiples de $2n\pi$ pour voir à quelle condition la suite des valeurs est bornée.