DM 4 - Fonctions absolument monotones

1 Généralités

1. RAS

2. Le fait que fg est de classe $\mathscr{C}^n$ fait partie du cours et doit êter dit *avant* de dériver. Pour la récurrence, on a le choix entre utiliser que $(fg)^{(n)} = \big((fg)'\big)^{(n-1)}$ ou $\big((fg)^{(n-1)}\big)'$. Dans le premier cas, il était nécessaire de ne pas fixer f et g dans la récurrence (car l'hypothèse de récurrence *change de fonction*) ; dans ce cas le prédicat de récurrence doit explictement mettre en évidence le fait que ce qu'on montre est valable pour tout couple de fonctions f, g.

3. La stabilité par somme et produit des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ fait partie du cours et doit être affirmé avant de calculer les dérivées n-èmes.

4. De même, $\exp \circ f$ (abrégée avec abus de notation en $\exp(f)$) est de classe $\mathscr{C}^\infty$ par le cours. J'ai eu droit à quelques calculs fantaisistes de la dérivée n-ème.

5. RAS

2 La fonction arcsinus est absolument monotone sur $]0,1[$.

6. On peut aller vite sur ce calcul. Une *récurrence immédiate* suffit sans doute.

7. Les petits calculs sur les inégalités sont trop souvent mal écrits.

8. Le plus simple était de considérer le logarithme de f, mais beaucoup s'en sortent bien en remarquant que $f' = gf$ et en refaisant le même genre de démonstration que pour l'exponentielle.

9. Ne pas oublier de dire que Arcsin est positive sur l'intervalle considéré. Par ailleurs, les propriétés de la fonction Arcsin font partie du cours ; je n'ai pas besoin de relire le calcul de la dérivée.

3 Différences finies

10. Le calcul ne pose pas de problème mais l'écriture est souvent incorrecte. Δ_h prend en argument une fonction, pas un nombre. Il faut donc écrire $\Delta_h\big(\Delta_h(f)\big)(x)$ et non $\Delta_h\big(\Delta_h(f(x))\big)$.

11. Selon la façon d'écrire la récurrence, on ne travaille pas nécessairement à f, x ou h fixés. Le prédicat de récurrence devrait systématiquement être écrit explicitement quand il n'est pas évident (et ici, il ne l'est clairement pas).

4 Absolument monotone $\Longrightarrow$ totalement monotone

12. Le fait qu'on dérive par rapport à h a posé quelques difficultés. Mais l'expression précédente de $\Delta_h^n f(x)$ rend cette dérivée facile. Dans un certain nombre de copies, la suite du calcul est faite correctement mais la formule du chef n'est pas reconnue.

13. L'argument consistait à comparer $X_{n+1}(h)$ à $X_{n+1}(0)$: il n'y a pas vraiment de raison pour que le sujet ne définisse X_n que sur $\mathbb{R}_+^*$ (certain.e.s ont préféré parler de limite en 0, ce qui est bien sûr correct). Dans quelques copies, on donne une autre preuve (plus ou moins correcte) ; quand une stratégie est manifestement attendue, on tâchera de ne pas en proposer une autre.

14. De nouveau, cette question mérite d'écrire clairement le prédicat de récurrence. Un argument de *récurrence immédiate* est un passage en force ; il y a au moins 3 façons distinctes de concevoir une telle récurrence.

5 Totalement monotone $\Longrightarrow$ absolument monotone

15. La positivité de ne pose pas de problème. Pour la croissance, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0, f(x+h) - f(x) \geq 0$. Dans certaines copies, on divise alors par h pour montrer que la dérivée de f est positive, et donc que f est croissante. Mais :

    - On n'a pas supposé que f était dérivable.
    - Quand bien même elle le serait, cela dénote un manque de recul. L'inégalité est équivalente à dire que pour tous $y > x$, $f(y) \geq f(x)$, ce qui donne immédiatement la croissance.

    Il est préférable de revenir à la définition de f croissante avec y et x, plutôt qu'avec $x+h$ et x. Dans certaines copies, j'ai lu : *Comme h est positif, f est croissante*, ce qui est très maladroit (le point important étant que tout $y > x$ peut s'écrire $x+h$, avec $h > 0$).

16. Les calculs sont très souvent mal écrits. La dépendance en k de c doit apparaître explicitement. Dans beaucoup de copies, je ne suis pas capable de déterminer en temps raisonnable si le calcul est juste ; les personnes concernées doivent faire de réels efforts de présentation.

17. (Bonus)