DM 5 - Théorème de Dirichlet et valeurs paires de ζ

Le but du problème est de calculer les valeurs prises en les entiers pairs par la fonction ζ, définie pour $s \in]1,+\infty[$ par $\zeta(s) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$. On montre la belle formule suivante :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \zeta(2p) = (-1)^{p+1} \frac{2^{2p-1}\pi^{2p}}{(2p)!} b_{2p},$$

les nombres de Bernoulli b_{2p} étant des nombres rationnels définis dans le problème.

Le problème se décompose en deux parties indépendantes. Dans la première, on montre le théorème de Dirichlet, résultat fondamental dans la théorie des séries de Fourier. Dans la deuxième, on calcule les coefficients de Fourier des polynômes de Bernoulli. La formule souhaitée s'obtient alors par application du théorème de Dirichlet à ces polynômes.

1 Théorème de Dirichlet

1.1 Noyau de Dirichlet

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note D_n le noyau de Dirichlet d'ordre n, défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

1. Montrer que D_n est une fonction paire, 2π-périodique et continue.
2. Montrer que $\int_0^1 D_n(2\pi t)\,dt = 1$.
3. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, D_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\big((n+1/2)x\big)}{\sin(x/2)} & \text{si } x \not\equiv 0[2\pi] \\ 2n+1 & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \end{cases}$$

1.2 Théorème de Dirichlet

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, telle que $f(0) = f(1)$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on définit le k-ème coefficient de Fourier de f par

$$c_k(f) = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi kt}\,dt.$$

On note $S_n(f) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(f)$.

4. Montrer que $S_n(f) = \int_0^1 f(t) D_n(2\pi t)\,dt = \int_0^{1/2} \big(f(t) + f(1-t)\big) D_n(2\pi t)\,dt$.

5. Montrer que $f(0)-S_n(f)=\int_0^{1/2}\big(f(0)-f(t)+f(1)-f(1-t)\big)D_n(2\pi t)dt$.

On définit h sur $]0,1/2]$ par $h(t)=\dfrac{f(0)-f(t)+f(1)-f(1-t)}{\sin(\pi t)}$.

6. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que h admet une limite finie en 0, que l'on précisera.

On peut donc prolonger h en une fonction continue sur $[0,1/2]$. Par abus de notation, on note encore h ce prolongement.

7. Montrer que
$$f(0)-S_n(f)=\int_0^{1/2}h(t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)dt.$$

On souhaite montrer que cette intégrale tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Dans les questions qui suivent, on admettra qu'une fonction continue sur un segment $[a,b]$ est bornée.

Soit $\varepsilon>0$.

8. Montrer qu'il existe $\delta\in]0,1/2]$ tel que $\left|\int_0^{\delta}h(t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)dt\right|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$.

9. En exploitant le caractère $\mathscr{C}^1$ de h sur $[\delta,1/2]$, montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\delta}^{1/2}h(t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)dt=0.$$

10. Par définition, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 0 en $+\infty$ si
$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}:\forall n\geq N,|u_n|\leq\varepsilon.$$
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{1/2}h(t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)dt=0$.

On a donc montré le théorème suivant :

Théorème de Dirichlet. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, telle que $f(0)=f(1)$.
$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=-N}^{N}c_k(f)=f(0).$$

2 Application aux valeurs paires de ζ

2.1 Polynômes de Bernoulli

11. Montrer qu'il existe une unique famille de fonctions polynomiales $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
   (a) $B_0=1$;
   (b) $\forall n\in\mathbb{N}^*, B_n'=nB_{n-1}$;

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 B_n(t)\,dt = 0.$

Les B_n sont les polynômes de Bernoulli. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $b_n = B_n(0)$ le n-ème nombre de Bernoulli.

12. Calculer B_n et b_n, pour $n \in [\![0,4]\!]$.

2.2 Calcul des coefficients de Fourier

Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit comme précédemment

$$c_k(B_n) = \int_0^1 B_n(t) e^{-2i\pi k t}\,dt.$$

13. Calculer $c_k(B_1)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

14. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \geq 1$:

$$c_k(B_n) = \frac{2i\pi k}{n+1} c_k(B_{n+1}).$$

15. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $n \geq 1$:

$$c_k(B_n) = \begin{cases} -\dfrac{n!}{(2i\pi)^n k^n} & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

On suppose désormais que $n \geq 2$.

16. Montrer que B_n vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet.

17. On suppose que n est impair. Que valent les sommes $\sum_{k=-N}^{N} c_k(B_n)$, pour $N \in \mathbb{N}$? En déduire la valeur de b_n.

18. On suppose que n est pair et on écrit $n = 2p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$. Établir une relation entre $\zeta(2p)$ et la suite $\left(\sum_{k=-N}^{N} c_k(B_n)\right)_{N\in\mathbb{N}}$. En déduire la formule annoncée en introduction du sujet.

19. Déterminer la valeur de $\zeta(2)$[1].

20. Déterminer la valeur de $\zeta(4)$.

[1] Problème de Bâle, résolu par Leonhard Euler en 1735