# DM 6 - Autour du Wronskien

On étudie dans ce problème des équations différentielles linéaires d'ordre 2, à coefficients non constants. On admet le résultat suivant, qui généralise le résultat du cours donné pour les coefficients constants :

**Problème de Cauchy - Existence et unicité.**
*Soient $p, q, r$ des fonctions à valeurs réelles, continues sur un intervalle $I$. Soit $x_0 \in I$, soient $y_0, \dot{y}_0 \in \mathbb{R}$. Il existe sur $I$ une unique fonction $f$, solution de l'équation différentielle*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

*telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = \dot{y}_0$.*

## Exercice 1. – *Propriétés générales du Wronskien*

On considère une équation différentielle $(E)$ $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, où $p$ et $q$ sont des fonctions continues, définies sur un intervalle $I$ et à valeurs réelles.

1. En considérant des problèmes de Cauchy bien choisis, montrer qu'on peut trouver deux solutions $f$ et $g$ de $(E)$ non proportionnelles.

On dit qu'un tel couple $(f, g)$ est un *couple fondamental* de solutions de $(E)$.

2. Soit $(f, g)$ un couple fondamental de solutions de $(E)$. Montrer que les solutions de $E$ sont exactement les fonctions de la forme $\lambda f + \mu g$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. Soient $f_1$ et $f_2$ deux solutions quelconques de $E$. On définit sur $I$ le Wronskien

$$W^{f_1,f_2}(x) = f_1(x)f_2'(x) - f_1'(x)f_2(x).$$

Montrer que $W^{f_1,f_2}$ vérifie une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.

4. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   - (i) $(f_1, f_2)$ est un couple fondamental de solutions.
   - (ii) $\exists x_0 \in I, W^{f_1,f_2}(x_0) \neq 0$.
   - (iii) $\forall x_0 \in I, W^{f_1,f_2}(x_0) \neq 0$.

## Solution 1

1. On fixe $x_0$ un point de $I$. Par le théorème d'existence à un problème de Cauchy, on peut trouver deux fonctions $f$ et $g$, solutions de $(E)$ telles que $f(x_0) = 0$ et $f'(x_0) = 1$ ; $g(x_0) = 1$ et $g'(x_0) = 0$.

   Si $f$ et $g$ étaient proportionnelles (et comme $f$ est non nulle), on pourrait trouver un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda f$. L'évaluation en 0 donne $1 = \lambda \times 0$, ce qui est absurde.

2. On sait que les combinaisons linéaires de solutions d'une équation homogène sont encore des solutions. Donc les fonctions de la forme $\lambda f + \mu g$ sont des solutions.

   Pour la réciproque, on fixe un $x_0 \in I$. On affirme que $u = (f(x_0), f'(x_0))$ et $v = (g(x_0), g'(x_0))$ ne sont pas colinéaires (dans $\mathbb{R}^2$). En effet, s'ils l'étaient, on pourrait par exemple trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = \lambda g(x_0)$ et $f'(x_0) = \lambda g'(x_0)$. Alors, $f$ et $\lambda g$ prennent la même valeur en $x_0$, et leur dérivée aussi. Par unicité dans le problème de Cauchy, on en déduit que $f = \lambda g$, ce qui contredit la non-proportionnalité de $f$ et $g$.

   Considérons maintenant une solution $h$ et notons $w = (h(x_0), h'(x_0))$. Comme $u$ et $v$ ne sont pas colinéaires, on peut trouver $\lambda$ et $\mu$ deux réels tels que $w = \lambda u + \mu v$, c'est-à-dire :

   $$h(x_0) = \lambda f(x_0) + \mu g(x_0) \text{ et } h'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0).$$

   Ainsi, $h$ et $\lambda f + \mu g$ sont deux solutions de $(E)$ et vérifient le même problème de Cauchy en $x_0$. Par unicité, on en déduit que $h = \lambda f + \mu g$.

   On a bien montré que les solutions de $(E)$ sont exactement les combinaisons linéaires $\lambda f + \mu g$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

3. Comme $f_1$ et $f_2$ sont deux fois dérivables, $W^{f_1,f_2}$ est une fois dérivable. Pour tout $x \in I$, on a

   $$(W^{f_1,f_2})'(x) = f_1'(x)f_2'(x) + f_1(x)f_2''(x) - f_1'(x)f_2'(x) - f_1''(x)f_2(x) = f_1(x)f_2''(x) - f_1''(x)f_2(x).$$

   En utilisant que $f_1$ et $f_2$ sont solutions de $(E)$ :

   $$(W^{f_1,f_2})'(x) = f_1(x)(-p(x)f_2'(x) - q(x)f_2(x)) - f_2(x)(-p(x)f_1'(x) - q(x)f_1(x)) = -p(x)W^{f_1,f_2}(x).$$

   Donc $W^{f_1,f_2}$ est solution de $z' = -p(x)z$.

4. L'équivalence de $(ii)$ et $(iii)$ peut être vue comme une conséquence de la question précédente : si $P$ est une primitive de $p$ sur $I$, on sait que $W$ est de la forme $x \mapsto Ce^{-P(x)}$, pour une certaine constante réelle $C$. Ainsi, $W$ s'annule en un point $x_0$ ssi $W$ est identiquement nulle, ce qui prouve cette équivalence.

   L'équivalence entre $(i)$ et $(ii)$ a plus ou moins été montrée à la question 2. Reprenons l'argument. Pour le sens $(ii) \implies (i)$ : si $W(x_0) \neq 0$, en un certain $x_0 \in I$, alors $(f_1(x_0), f_1'(x_0))$ et $(f_2(x_0), f_2'(x_0))$ ne sont pas colinéaires. En particulier, $f_1$ et $f_2$ ne sont pas des proportionnelles. Donc $(f_1, f_2)$ est une couple fondamental de solutions. Pour le sens $(i) \implies (ii)$, on choisit n'importe quel $x_0 \in I$. Si $(f_1, f_2)$ est un couple fondamental de solutions, alors $(f_1(x_0), f_1'(x_0))$ et $(f_2(x_0), f_2'(x_0))$ ne peuvent pas être proportionnels : s'ils l'étaient, on aurait en fait $f_1$ et $f_2$ par unicité des solutions à un problème de Cauchy (cf. question 2). Donc $W^{f_1,f_2}(x_0) \neq 0$.

   Remarque : on montre en fait $(i) \implies (iii)$ dans le dernier argument. On aurait donc pu se passer de la question 3. en montrant directement les trois implications $(i) \implies (iii)$, $(iii) \implies (ii)$ et $(ii) \implies (i)$ (la deuxième de ces implications étant évidente).

**Exercice 2.** – *Une équation explicite*

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $(E)$ $2x^2y'' + xy' - 3y = x^2e^{\sqrt{x}}$.

1. **Résolution de l'équation homogène.**
   (a) Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une solution de l'équation homogène associée à $(E)$.
   (b) Si $g$ est une solution de l'équation homogène, donner l'expression du Wronskien $W^{f,g}$, à une constante multiplicative près.
   (c) En déduire un couple fondamental de solutions de l'équation homogène.

2. **Recherche des solutions de $(E)$.**
   On fixe un couple fondamental de solutions de l'équation homogène $(f, g)$ et on cherche une solution de $(E)$ sous la forme $h(x) = \lambda(x)f(x) + \mu(x)g(x)$, où $\lambda$ et $\mu$ sont des fonctions deux fois dérivables sur $I$.
   (a) Montrer que si $\lambda$ et $\mu$ vérifient $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$\begin{cases} \lambda'(x)f(x) + \mu'(x)g(x) &= 0 \\ \lambda'(x)f'(x) + \mu'(x)g'(x) &= \dfrac{1}{2}e^{\sqrt{x}} \end{cases},$$
   alors $h$ est une solution de $(E)$.
   (b) En déduire une expression de $\lambda'$ et $\mu'$.
   (c) Déterminer une solution particulière de $(E)$ et conclure.
   *Le passage de $\lambda'$ à $\lambda$ étant particulièrement fastidieux, on conseille d'utiliser un logiciel de calcul formel. Par exemple, Wolfram Alpha. Taper Primitive of...*

## Solution 2

1. (a) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$. D'où :
   $$2x^2f''(x) + xy'(x) - 3y(x) = 4\frac{x^2}{x^3} + x\frac{-1}{x^2} - 3\frac{1}{x} = 0.$$
   (b) L'équation homogène peut être réécrite sous la forme
   $$y'' + \frac{x}{2}y' - \frac{3}{2x^2}y = 0.$$
   D'après la question 3 de l'exercice 1, $W^{f,g}$ est solution de $z' = -\dfrac{x}{2}z$. Donc, $W^{f,g}$ est de la forme
   $$W^{f,g} : x \mapsto C\exp(-\ln x/2) = \frac{C}{\sqrt{x}},$$
   où $C$ est une constante réelle.

(c) Si $g$ est une solution de l'équation homogène, on sait donc qu'il existe une constante $C$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x)g'(x) - g(x)f'(x) = \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

En remplaçant $f$ et $f'$ par leur expression :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) + \frac{1}{x}g(x) = C\sqrt{x}.$$

On constate rapidement que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{D}{x}$ (avec $D \in \mathbb{R}$) (en fait, on le savait déjà... pourquoi ?). On obtient une solution particulière par variation de la constante, ou en remarquant la solution évidente $x \mapsto \frac{2C}{5}x^{3/2}$.

Bilan : si $g$ est une solution de l'équation homogène associée à $(E)$, $g$ est de la forme :

$$g : x \mapsto \frac{D}{x} + Cx^{3/2},$$

avec $C, D \in \mathbb{R}$ (on a renormalisé la constante $C$).
Nous n'avons pas vraiment raisonné par équivalences. Mais comme on sait que l'ensemble des solutions est obtenu en prenant les combinaisons linéaires de deux fonctions, il n'y a pas le choix : $x \mapsto x^{3/2}$ doit aussi être une solution de l'équation homogène associée à $(E)$.
(*On peut aussi bien sûr le vérifier directement.*)

2. (a) On suppose que $\lambda$ et $\mu$ vérifient les conditions prescrites. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on calcule :

$$h'(x) = \lambda'(x)f(x) + \lambda(x)f'(x) + \mu'(x)g(x) + \mu(x)g'(x) = \lambda(x)f'(x) + \mu(x)g'(x).$$

$$h''(x) = \lambda'(x)f'(x) + \lambda(x)f''(x) + \mu'(x)g'(x) + \mu(x)g''(x) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}} + \lambda(x)f''(x) + \mu(x)g''(x).$$

Comme $f$ et $g$ sont solutions de l'équation homogène, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ : $2x^2h''(x) + xh'(x) - 3h(x) =$

$$x^2e^{\sqrt{x}} + \lambda(x)(2x^2f''(x) + xf'(x) - 3f(x)) + \mu(x)(2x^2g''(x) + xg'(x) - 3g(x)) = x^2e^{\sqrt{x}}.$$

(b) On multiplie la première équation par $g'(x)$ et la deuxième par $g(x)$, puis on les soustrait. On obtient :

$$\lambda'(x)W^{f,g}(x) = -\frac{g(x)}{2}e^{\sqrt{x}}.$$

On multiplie la première équation par $f'(x)$ et la deuxième par $f(x)$, puis on les soustrait. On obtient:

$$\mu'(x)W^{f,g}(x) = \frac{f(x)}{2}e^{\sqrt{x}}.$$

Ainsi, $\lambda$ et $\mu$ vérifient les conditions données ssi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\begin{cases} \lambda'(x) &= -\frac{g(x)}{2}e^{\sqrt{x}}(W^{f,g}(x))^{-1} \\ \mu'(x) &= \frac{f(x)}{2}e^{\sqrt{x}}(W^{f,g}(x))^{-1} \end{cases}$$

(*On peut bien diviser par le Wronskien puisqu'on sait qu'il est non nul en tout point.*)

(c) Avec $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x^{3/2}$, le Wronskien vaut

$$W^{f,g}(x) = \frac{1}{x} \times \frac{3}{2}x^{1/2} - (-\frac{1}{x^2})x^{3/2} = \frac{5}{2\sqrt{x}}.$$

On a donc :

$$\lambda'(x) = -\frac{x^2}{5}e^{\sqrt{x}} \text{ et } \mu'(x) = \frac{1}{5\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}.$$

En utilisant un calculateur formel (p. ex. Wolfram Alpha), on peut prendre :

$$\lambda(x) = -\frac{2}{5}e^{\sqrt{x}}(x^{5/2} + 20x^{3/2} - 5x^2 - 60x + 120\sqrt{x} - 120) \text{ et } \mu(x) = \frac{2}{5}e^{\sqrt{x}}.$$

(*Pour $\mu$, c'était facile !*)

Finalement, une solution est donnée par

$$x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x} + x^{3/2}\mu(x).$$

On obtient l'ensemble des solutions en ajoutant les solutions de l'équation homogène. Elles sont donc de la forme :

$$x \mapsto (\lambda(x) + C)\frac{1}{x} + (\mu(x) + D)x^{3/2},$$

avec $C$ et $D$ deux constantes réelles.

**Exercice 3.** – *Entrelacement de racines et équation de Bessel*

On considère deux fonctions $p$ et $q$ continues sur un intervalle $I$ et à valeurs réelles. On note $(E_p)$ et $(E_q)$ les équations différentielles $y'' + p(x)y = 0$ et $y'' + q(x)y = 0$.
On note $f$ et $g$ des solutions respectives de $(E_p)$ et $(E_q)$ et on note $W$ l'analogue du Wronskien défini par

$$W(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x).$$

1. Exprimer simplement $W'$ en fonction de $f$, $g$, $p$ et $q$.

2. Soient $\alpha < \beta$ deux réels dans $I$. On suppose que $f$ s'annule en $\alpha$ et $\beta$ et que $f$ est strictement positive sur $]\alpha, \beta[$. On suppose de plus que $p \leq q$ sur $I$.

   Montrer que $g$ s'annule sur $[\alpha, \beta]$.

   *On pourra raisonner par l'absurde et considérer les variations de $W$.*

3. **Application à l'équation de Bessel.** On fixe $\nu \in \mathbb{R}_+$ et on considère sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation de Bessel

$$(B_\nu)\ \ x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

(a) Montrer que $f$ est solution de $(B_\nu)$ ssi $g : x \mapsto \sqrt{x}f(x)$ est solution de

$$z'' + \left(1 - \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2}\right) z = 0.$$

(b) Soit $f$ une solution non nulle de $(B_\nu)$. Montrer que :

i) Si $\nu \geq 1/2$, alors deux zéros consécutifs de $f$ sont à distance au moins $\pi$.

ii) Si $\nu \leq 1/2$, alors $f$ s'annule au moins une fois sur tout segment de longueur $\pi$.

## Solution 3

1. On calcule, pour $x \in I$ :

$$W'(x) = f(x)g''(x) - f''(x)g(x) = f(x)g(x)(p(x) - q(x)).$$

2. Supposons par l'absurde que $g$ ne s'annule pas sur $[\alpha, \beta]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, $g$ est de signe constant sur cet intervalle. Comme $p \leq q$, on obtient que $W'$ est du signe de $-fg$ sur $[\alpha, \beta]$. En particulier, $W'$ est positif ou négatif sur $]\alpha, \beta[$, donc $W$ est croissante ou décroissante sur $[\alpha, \beta]$.

   Pour fixer les idées, disons que $g$ est strictement positive sur $]\alpha, \beta[$ (on peut se ramener à ce cas en considérant $-g$ au lieu de $g$). Alors $W$ est décroissante sur $[\alpha, \beta]$. Or, $W(\alpha) = -f'(\alpha)g(\alpha)$ et $W(\beta) = -f'(\beta)g(\beta)$.

   Comme $f'(\alpha) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(\alpha + h)}{h}$, $f'(\alpha) \geq 0$ ($f(x + h)$ est positif). De même, $f'(\beta) = \lim_{h \to 0+} \dfrac{f(\beta - h)}{-h}$, donc $f'(\beta) \leq 0$. De plus, on a $f'(\alpha) \neq 0$. Sinon, on aurait $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ et le résultat d'unicité pour la solution d'un problème de Cauchy montre que $f$ est la fonction nulle. On a donc $f'(\alpha) > 0$ et de même $f'(\beta) < 0$.

   Ainsi, $W$ est décroissante sur $[\alpha, \beta]$ et vérifie :

$$W(\alpha) < 0 < W(\beta).$$

   C'est absurde ! Donc $g$ s'annule sur $[\alpha, \beta]$.

3. (a) Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors $g : x \mapsto \sqrt{x}f(x)$, sur $\mathbb{R}_+^*$ est aussi deux fois dérivable. Pour tout $x > 0$, on a :

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}f(x) + x^{1/2}f'(x).$$

$$g''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}f(x) + x^{-1/2}f'(x) + x^{1/2}f''(x).$$

   On raisonne maintenant par équivalences. $f$ est solution de $(B_\nu)$ ssi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 f''(x) + xf'(x) + (x^2 - \nu^2)f(x) = 0$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^{3/2}g''(x) + \frac{1}{4}f(x) + (x^2 - \nu^2)f(x) = 0$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g''(x) + (\frac{1}{4} + x^2 - \nu^2)\frac{g(x)}{x^2} = 0$$

   ssi $g$ est solution de $z'' + \left(1 + \dfrac{4\nu^2 - 1}{4x^2}\right) z = 0.$

(b) Remarquons que $f$ s'annule en un point ssi $g$ s'annule en le même point. On peut donc raisonner sur $g$. Notons $p(x) = 1 + \dfrac{4\nu^2 - 1}{4x^2}$.

Si $\nu \geq 1/2$, on a $1 \leq p$. Supposons par l'absurde que $f$ admette deux zéros consécutifs $\alpha$ et $\beta$ à distance $< \pi$. Quitte à considérer $-f$, on peut supposer que $f$ est strictement positive sur $]\alpha, \beta[$. Alors, par la question 2., toute solution de $y'' + y = 0$ doit s'annuler sur $[\alpha, \beta]$. Or, $x \mapsto \sin(x - \gamma)$ est une telle solution. En prenant $\gamma = \alpha - \varepsilon$, avec $\varepsilon$ tel que $0 < \varepsilon < \pi - (\beta - \alpha)$, on constate que cette fonction ne s'annule pas sur $[\alpha, \beta]$. Contradiction.

Si $\nu \leq 1/2$, on a $p \leq 1$. Soit $[\alpha, \alpha + \pi]$ un segment de longueur $\pi$. On peut trouver une solution de $y'' + y = 0$ qui s'annule en $\alpha$ et $\alpha + \pi$ et qui est strictement positive sur $]\alpha, \alpha + \pi[$ : il suffit de prendre $x \mapsto \sin(x - \alpha)$. Par la question 2., on en déduit que $f$ s'annule sur ce segment.