DM 6 - Autour du Wronskien

On étudie dans ce problème des équations différentielles linéaires d'ordre 2, à coefficients non constants. On admet le résultat suivant, qui généralise le résultat du cours donné pour les coefficients constants :

Problème de Cauchy - Existence et unicité.

Soient p, q, r des fonctions à valeurs réelles, continues sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$, soient $y_0, \dot{y}_0 \in \mathbb{R}$. Il existe sur I une unique fonction f, solution de l'équation différentielle

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = \dot{y}_0$.

Exercice 1. – *Propriétés générales du Wronskien*

On considère une équation différentielle (E) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, où p et q sont des fonctions continues, définies sur un intervalle I et à valeurs réelles.

1. En considérant des problèmes de Cauchy bien choisis, montrer qu'on peut trouver deux solutions f et g de (E) non proportionnelles.

On dit qu'un tel couple (f, g) est un *couple fondamental* de solutions de (E).

2. Soit (f, g) un couple fondamental de solutions de (E). Montrer que les solutions de E sont exactement les fonctions de la forme $\lambda f + \mu g$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. Soient f_1 et f_2 deux solutions quelconques de E. On définit sur I le Wronskien

$$W^{f_1,f_2}(x) = f_1(x)f_2'(x) - f_1'(x)f_2(x).$$

   Montrer que W^{f_1,f_2} vérifie une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.

4. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   (i) (f_1, f_2) est un couple fondamental de solutions.

   (ii) $\exists x_0 \in I, W^{f_1,f_2}(x_0) \neq 0$.

   (iii) $\forall x_0 \in I, W^{f_1,f_2}(x_0) \neq 0$.

Exercice 2. – *Une équation explicite*

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E) $2x^2y'' + xy' - 3y = x^2e^{\sqrt{x}}$.

1. **Résolution de l'équation homogène.**

   (a) Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une solution de l'équation homogène associée à (E).

(b) Si g est une solution de l'équation homogène, donner l'expression du Wronskien $W^{f,g}$, à une constante multiplicative près.

(c) En déduire un couple fondamental de solutions de l'équation homogène.

2. **Recherche des solutions de** (E)**.**

On fixe un couple fondamental de solutions de l'équation homogène (f, g) et on cherche une solution de (E) sous la forme $h(x) = \lambda(x)f(x) + \mu(x)g(x)$, où λ et μ sont des fonctions deux fois dérivables sur I.

(a) Montrer que si λ et μ vérifient $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda'(x)f(x) + \mu'(x)g(x) & = 0 \\ \lambda'(x)f'(x) + \mu'(x)g'(x) & = \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}} \end{array}\right. ,$$

alors h est une solution de (E).

(b) En déduire une expression de λ' et μ'.

(c) Déterminer une solution particulière de (E) et conclure.

Le passage de λ' à λ étant particulièrement fastidieux, on conseille d'utiliser un logiciel de calcul formel. Par exemple, Wolfram Alpha. Taper Primitive of...

Exercice 3. – *Entrelacement de racines et équation de Bessel*

On considère deux fonctions p et q continues sur un intervalle I et à valeurs réelles. On note (E_p) et (E_q) les équations différentielles $y'' + p(x)y = 0$ et $y'' + q(x)y = 0$.
On note f et g des solutions respectives de (E_p) et (E_q) et on note W l'analogue du Wronskien défini par

$$W(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x).$$

1. Exprimer simplement W' en fonction de f, g, p et q.

2. Soient $\alpha < \beta$ deux réels dans I. On suppose que f s'annule en α et β et que f est strictement positive sur $]\alpha, \beta[$. On suppose de plus que $p \leq q$ sur I.

Montrer que g s'annule sur $[\alpha, \beta]$.

On pourra raisonner par l'absurde et considérer les variations de W.

3. **Application à l'équation de Bessel.** On fixe $\nu \in \mathbb{R}_+$ et on considère sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation de Bessel

$$(B_\nu) \;\; x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

(a) Montrer que f est solution de (B_ν) ssi $g : x \mapsto \sqrt{x}f(x)$ est solution de

$$z'' + \left(1 - \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2}\right)z = 0.$$

(b) Soit f une solution non nulle de (B_ν). Montrer que :

i) Si $\nu \geq 1/2$, alors deux zéros consécutifs de f sont à distance au moins π.

ii) Si $\nu \leq 1/2$, alors f s'annule au moins une fois sur tout segment de longueur π.