DM 6 - Cardinaux et ensembles dénombrables

Exercice 1. – *Théorème de Cantor-Bernstein*

Soient E et F deux ensembles[1], soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux injections. On souhaite montrer que E et F sont équipotents, c'est-à-dire qu'il existe une bijection de E dans F – c'est le *théorème de Cantor-Bernstein.*
On introduit d'abord quelques définitions :

- Un élément $x \in E$ (resp. $y \in F$) a un parent s'il a un antécédent par g (resp. par f). Un tel antécédent est nécessairement unique : on l'appellera *le parent* de x (resp. de y).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit récursivement le nombre d'ancêtres d'un élément de E ou de F :
  - Les éléments ayant 0 ancêtre sont ceux n'ayant pas de parent.
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les éléments ayant (exactement) n ancêtres sont ceux ayant un parent, et dont le parent a (exactement) $n-1$ ancêtres.
  - Les éléments restants ont une infinité d'ancêtres.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n (resp. F_n) les éléments de E (resp. de F) ayant n ancêtres.
- On note E_∞ (resp. F_∞) les éléments de E (resp. de F) ayant une infinité d'ancêtres.

1. Montrer que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} E_n$ et que cette union est disjointe.
   On admet le résultat analogue pour F.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f(E_n) = F_{n+1}$ et que $g(F_n) = E_{n+1}$. En déduire que
   $$f_{|E_n} : E_n \to F_{n+1} \text{ et } g_{|F_n} : F_n \to E_{n+1}$$
   sont des bijections.
3. Montrer que $f(E_\infty) = F_\infty$ et en déduire que $f_{|E_\infty} : E_\infty \to F_\infty$ est une bijection.
4. En déduire l'existence d'une bijection $h : E \to F$.
   On pourra faire un schéma résumant la situation.

[1] On supposera pour simplifier E et F disjoints mais le résultat est valable en général.

Exercice 2. – *Cardinaux*[2]

On suppose connu le théorème de Cantor-Bernstein.
Soit Ω un ensemble dont les éléments sont des ensembles[3]. On définit une relation binaire $\sim$ sur Ω par

$$\forall A, B \in \Omega, A \sim B \text{ ssi } \exists f : A \to B \text{ une bijection.}$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur Ω.

On note C_Ω l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$. Si $A \in \Omega$, on note $\hat{A} \in C_\Omega$ la classe de A. On définit une relation binaire $\leq$ sur C_Ω par :

$$\forall \hat{A}, \hat{B} \in C_\Omega, A \leq B \text{ ssi } \exists f : A \to B \text{ une injection.}$$

2. Montrer que $\leq$ est bien définie et que c'est une relation d'ordre sur C_Ω.

On cherche à montrer que cet ordre est total. On considère donc A et B deux ensembles dans Ω et on doit montrer qu'il existe une injection de A vers B ou de B vers A.

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des triplets (E, F, f) où $E \subset A$, $F \subset B$ et $f : E \to F$ est une bijection. On définit une relation d'ordre $\leq$ sur $\mathscr{A}$ par : $(E, F, f) \leq (E', F', f')$ si $E \subset E'$, $F \subset F'$ et f' prolonge f.

3. Soit $\mathscr{C}$ une partie de $\mathscr{A}$ tel que l'ordre induit par $\leq$ sur $\mathscr{C}$ est total. Montrer que $\mathscr{C}$ admet une borne supérieure dans $\mathscr{A}$.

Le lemme de Zorn[4] permet alors d'affirmer qu'il existe au moins un élément maximal dans $\mathscr{A}$. Considérons un tel élément, donné par un triplet (E, F, f).

4. On suppose par l'absurde que $E \neq A$ et $F \neq B$. Obtenir une contradiction.
5. Conclure.

Exercice 3. – *Ensembles infinis dénombrables*

Un ensemble est *infini dénombrable* s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Dans cet exercice, on donne des exemples élémentaires de cette notion.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ est infini dénombrable.
2. En utilisant l'application $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, définie par $\psi(n, p) = 2^n(2p+1) - 1$, montrer que $\mathbb{N}^2$ est infini dénombrable.
3. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^k$ est infini dénombrable.
4. Montrer que toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est infinie dénombrable.
5. En déduire qu'une partie infinie d'un ensemble infini dénombrable est infinie dénombrable.
6. Montrer que $\mathbb{Q}$ est infini dénombrable.

[2]Uniquement pour les amateurs/amatrices d'abstraction. Ne sera pas corrigé.
[3]On pourra penser à Ω comme l'ensemble *de tous* les ensembles, mais il n'existe pas de tel ensemble...
[4]Équivalent à l'axiome du choix.

Exercice 4. – $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable*

On souhaite montrer que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable. On note

- $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites $u : \mathbb{N}^* \to [\![0,9]\!]$ qui ne sont pas stationnaires en 9 :
$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : u_n \neq 9.$$
- f l'application de $\mathscr{S}$ dans $[0,1[$ définie par
$$\forall u \in \mathscr{S}, f(u) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{10^n}.$$

1. Montrer que f est bien définie.

Soient u et v deux suites distinctes dans $\mathscr{S}$. On note $k \in \mathbb{N}^*$ le plus petit indice tel que $u_k \neq v_k$. Par symétrie, on suppose $u_k < v_k$. On note $p \in \mathbb{N}^*$ un indice tel que $p > k$ et $u_p \neq 9$.

2. Soit $N \geq p$. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{v_n}{10^n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{10^n} \geq \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^N}.$$
3. En déduire que f est injective.

On se donne, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une suite[5] u^k dans $\mathscr{S}$.

4. Construire une suite v dans $\mathscr{S}$ distincte de tous les u^k.
5. En déduire que $\mathscr{S}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables.

Notes.

- Il n'est pas difficile de montrer que f est une bijection de $\mathscr{S}$ dans $[0,1[$.
- Avec un peu plus de travail, on montre que $\mathbb{R}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents.
- L'hypothèse du continu affirme que tout ensemble X tel que $\mathbb{N} \subset X \subset \mathbb{R}$ est infini dénombrable ou équipotent à $\mathbb{R}$. En 1963, le mathématicien Paul Cohen a démontré que l'hypothèse du continu et l'axiome du choix sont indécidables : il est impossible de démontrer, à partir des axiomes de la théorie des ensembles, que ces assertions sont vraies ou fausses.

[5] On fera attention à bien distinguer exposant et indice. Le n-ème terme de la suite u^k s'écrit u_n^k.