DM 5 - Théorème de Dirichlet et valeurs paires de ζ

1 Théorème de Dirichlet

1.1 Noyau de Dirichlet

1. Pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$, la fonction $x \mapsto e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx)$ est 2π-périodique et continue. Il en est donc de même de $D_n : x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $D_n(-x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(-x)} = \sum_{\ell=-n}^{n} e^{i\ell x} = D_n(x)$, donc D_n est paire.

2. $\int_0^1 D_n(2\pi t)dt = \sum_{k=-n}^{n} \int_0^1 e^{2ik\pi t}dt$. Pour $k = 0$, la fonction intégrée est constante égale à 1, donc l'intégrale vaut 1. Pour $k \neq 0$,
$$\int_0^1 e^{2i\pi kt}dt = \left[\frac{e^{2i\pi kt}}{2i\pi k}\right]_0^1 = 1 - 1 = 0.$$
   D'où $\int_0^1 D_n(2\pi t)dt = 1$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On peut écrire
$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} (e^{ix})^k.$$
   C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison e^{ix}.

   Si x est un multiple entier de 2π, chaque terme vaut 1 et $D_n(x) = 2n + 1$.

   Sinon,
$$\begin{aligned} D_n(x) &= e^{i(-nx)}\frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= e^{-inx}\frac{e^{i(n+1/2)x} \times 2i\sin\Big((n+1/2)x\Big)}{e^{ix/2} \times 2i\sin(x/2)} \\ &= \frac{\sin\Big((n+1/2)x\Big)}{\sin(x/2)}. \end{aligned}$$

1.2 Théorème de Dirichlet

4. On a

$$\begin{aligned}
S_n(f) &= \sum_{k=-n}^{n} \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi kt}dt \\
&= \int_0^1 f(t)\Big(\sum_{k=-n}^{n} e^{-2i\pi kt}\Big)dt \\
&= \int_0^1 f(t)D_n(-2\pi t)dt \\
&= \int_0^1 f(t)D_n(2\pi t)dt,
\end{aligned}$$

par parité de D_n.

Pour la deuxième égalité, on commence par couper l'intégrale en deux, par relation de Chasles :

$$S_n(f) = \int_0^{1/2} f(t)D_n(2\pi t)dt + \int_{1/2}^1 f(t)D_n(2\pi t)dt.$$

Par changement de variable $u = 1-t$, la deuxième intégrale vaut

$$\int_{1/2}^0 f(1-u)D_n(2\pi(1-u))(-du) = \int_0^{1/2} f(1-u)D_n(2\pi(1-u))du.$$

Or, par parité et 2π-périodicité, $D_n(2\pi(1-u)) = D_n(-2\pi u) = D_n(2\pi u)$. Donc,

$$S_n(f) = \int_0^{1/2} f(t)D_n(2\pi t)dt + \int_0^{1/2} f(1-t)D_n(2\pi t)dt = \int_0^{1/2} (f(t)+f(1-t))D_n(2\pi t)dt.$$

5. En utilisant la deuxième égalité de la question précédente, le membre de droite vaut

$$\int_0^{1/2} (f(0)+f(1))D_n(2\pi t)dt - S_n(f) = 2f(0)\int_0^{1/2} D_n(2\pi t)dt - S_n(f),$$

car $f(0) = f(1)$.

Or, par parité et 2π-périodicité,

$$\int_0^{1/2} D_n(2\pi t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} D_n(2\pi t)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 D_n(2\pi t)dt = \frac{1}{2}.$$

D'où l'égalité :

$$f(0) - S_n(f) = \int_0^{1/2} \big(f(0)-f(t)+f(1)-f(1-t)\big)D_n(2\pi t)dt.$$

6. Soit $t \in]0,1/2[$. On réécrit $h(t)$ sous la forme

$$h(t) = \frac{-\frac{f(t)-f(0)}{t} + \frac{f(1)-f(1-t)}{t}}{\pi\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}}.$$

Chacune des petites fractions est un taux d'accroissement, dont la limite en 0 est connue. Par opérations élémentaires sur les limites, on a

$$\lim_{t\to 0} h(t) = \frac{-f'(0)+f'(1)}{\pi}.$$

En définissant $\tilde{h}$ comme la fonction égale à h sur $]0,1/2]$ et prenant cette valeur limite en 0, $\tilde{h}$ est bien un prolongement continu de h à $[0,\pi/2]$.

7. Par la question 3, les fonctions définies sur $[0,1/2]$ par

$$t \mapsto (f(0)-f(t)+f(1)-f(1-t))D_n(2\pi t) \text{ et } t \mapsto \tilde{h}(t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)$$

sont égales (elles valent toutes deux 0 en 0). Donc, leur intégrale sur $[0,1/2]$ aussi. Par la question 5, cela donne l'égalité souhaitée.

8. La fonction $t \mapsto h(t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)$ est continue sur $[0,1/2]$, par produit de fonctions continues. Elle y est donc bornée. On pose $M > 0$ tel que $\forall t \in [0,1/2]$, $\Big|\sin\big((2n+1)\pi t\big)\Big| \le M$.
Soit $\delta \in]0,1/2]$. Par inégalité triangulaire, on a

$$\Big|\int_0^\delta \sin\big((2n+1)\pi t\big)dt\Big| \le \int_0^\delta \Big|\sin\big((2n+1)\pi t\big)dt\Big| \le \int_0^\delta M = M\delta.$$

Ainsi, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2M}$ convient.

9. Comme h et $t \mapsto \sin\big((2n+1)\pi t\big)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\delta,1/2]$, on peut faire une intégration par parties :

$$\int_\delta^{1/2} h(t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)dt = \frac{1}{2n+1}[-h(t)\cos\big((2n+1)\pi t\big)]_\delta^{1/2} + \frac{1}{2n+1}\int_\delta^{1/2} h'(t)\cos\big((2n+1)\pi t\big)dt.$$

On note $M' > 0$ un réel tel que $|h'(t)| \le M'$, pour tout $t \in [\delta,1/2]$ et on reprend la constante M de la question précédente. Par inégalité triangulaire, en majorant $|\cos|$ par 1, on obtient immédiatement :

$$\Big|\int_\delta^{1/2} h(t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)dt\Big| \le \frac{2M}{2n+1} + \frac{M'(1/2-\delta)}{2n+1}.$$

La suite de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc, par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\delta^{1/2} h(t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)dt = 0.$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par relation de Chasles, avec le δ précédent, on a :

$$\int_0^{1/2} h(t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)dt = \int_0^\delta h(t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)dt + \int_\delta^{1/2} h(t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)dt.$$

Par inégalité triangulaire, et en utilisant la question 8., on a donc

$$\Big|\int_0^{1/2} h(t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)dt\Big| \le \frac{\varepsilon}{2} + \Big|\int_\delta^{1/2} h(t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)dt\Big|.$$

L'intégrale à droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, par la question précédente. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\left|\int_\delta^{1/2} h(t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, pour tout $n \geq N$,

$$\left|\int_0^{1/2} h(t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)dt\right| \leq \varepsilon.$$

On a bien montré que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{1/2} h(t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)dt = 0$.

2 Application aux valeurs paires de ζ

2.1 Polynômes de Bernoulli

11. On procède par récurrence sur $N \in \mathbb{N}$. Notons $\mathscr{P}(N)$ la propriété : il existe une unique famille de polynômes $(B_n)_{n\leq N}$ vérifiant les conditions (a), (b) et (c) (avec $n \leq N$ dans (b) et (c)).

    Initialisation : $\mathscr{P}(0)$ est vraie puisque $B_0 = 1$ est donné dans l'énoncé.

    Hérédité : on suppose $\mathscr{P}(N)$ vraie pour un $N \in \mathbb{N}$ et on note $B_0, \dots, B_N$ les polynômes uniquement définis. Une famille satisfaisant $\mathscr{P}(N+1)$ est nécessairement de la forme $(B_0, \dots, B_N, B_{N+1})$ (par unicité de la famille $(B_0, \dots, B_N)$). De plus, cette famille convient ssi $B'_{N+1} = (N+1)B_N$ et $\int_0^1 B_{N+1}(t)dt = 0$.

    Notons Q une primitive quelconque de $(N+1)B_N$: c'est nécessairement une application polynomiale. Alors, B_{N+1} est à chercher de la forme $Q + C$, pour une constante C réelle. La condition (c) est équivalente à $C = -\int_0^1 Q(t)dt$, ce qui détermine la constante C. Ainsi, il existe un unique B_{N+1} satisfaisant les conditions requises.

12. Après calculs, on trouve, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

    - $B_0(t) = 1$, $b_0 = 1$;
    - $B_1(t) = t - 1/2$, $b_1 = -1/2$;
    - $B_2(t) = t^2 - t + 1/6$, $b_2 = 1/6$;
    - $B_3(t) = t^3 - 3/2(t^2) + t/2$, $b_3 = 0$;
    - $B_4(t) = t^4 - 2t^3 + t^2 - 1/30$, $b_4 = -1/30$.

2.2 Calcul des coefficients de Fourier

13. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$c_k(B_1) = \int_0^1 (t - 1/2)e^{-2i\pi kt}dt.$$

Si $k = 0$, c'est $\int_0^1 B_(1)t dt$, qui vaut 0 par construction.

Si $k \neq 0$, on procède par intégration par parties :

$$c_k(B_1) = \left[(t-1/2)\frac{e^{-2i\pi kt}}{-2i\pi k}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-2i\pi kt}dt.$$

L'intégrale vaut 0 et le crochet $-\dfrac{1}{2i\pi k}$.

Bilan : $c_k(B_1) = -\dfrac{1}{2i\pi k}$ si $k \neq 0$ et $c_0(B_1) = 0$.

14. Soit $k \in \mathbb{Z}$, soit $n \geq 1$. On a :

$$c_k(B_n) = \int_0^1 B_n(t)e^{-2i\pi kt}dt = \frac{1}{n+1}\int_0^1 B'_{n+1}(t)e^{-2i\pi kt}dt.$$

Par intégration par parties, on en déduit :

$$c_k(B_n) = \frac{1}{n+1}\Big(\left[B_{n+1}(t)e^{-2i\pi kt}\right]_0^1 + 2ik\pi\int_0^1 B_{n+1}(t)e^{-2i\pi kt}dt\Big).$$

Le crochet vaut $B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = \displaystyle\int_0^1 B'_{n+1}(t)dt = (n+1)\int_0^1 B_n(t)dt = 0$, car $n \geq 1$. Ainsi :

$$c_k(B_n) = \frac{2ik\pi}{n+1}c_k(B_{n+1}).$$

15. La relation précédente montre immédiatement que $c_0(B_n)$ est nul, pour tout $n \geq 1$.

Soit $k \neq 0$, soit $n \geq 1$. Par téléscopage, on écrit :

$$c_k(B_n) = c_k(B_1)\prod_{j=1}^{n-1}\frac{c_k(B_{j+1})}{c_k(B_j)}.$$

On utilise la question précédente et l'expression de $c_k(B_1)$:

$$c_k(B_n) = -\frac{1}{2i\pi k}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{(j+1)}{2i\pi k} = -\frac{n!}{(2i\pi)^n k^n}.$$

16. Comme B_n est une application polynomiale, elle est de classe $\mathscr{C}^1$. On a

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n(t)dt = n\int_0^1 B_{n-1}(t)dt = 0,$$

car $n-1 \geq 1$.

17. Soit $N \in \mathbb{N}$. On peut regrouper les termes d'indices positif et négatif ; on a donc :

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k(B_n) = c_0(B_n) + \sum_{k=1}^{N}\big(c_k(B_n) + c_{-k}(B_n)\big).$$

Comme n est impair, $(-k)^n = -k^n$ pour tout $k \geq 1$. De la formule trouvée pour $c_k(B_n)$, on en déduit que $c_k(B_n) + c_{-k}(B_n) = 0$. De plus, $c_0(B_n) = 0$.

Donc, les sommes $\displaystyle\sum_{k=-N}^{N} c_k(B_n)$ sont nulles, pour tout $N \in \mathbb{N}$. D'après le théorème de Dirichlet, on a $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=-N}^{N} c_k(B_n) = B_n(0) = b_n$. Ainsi, b_n est nul pour tout $n \geq 3$ impair.

18. Soit $N \in \mathbb{N}$. De nouveau, on écrit :

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k(B_n) = c_0(B_n) + \sum_{k=1}^{N} \big(c_k(B_n) + c_{-k}(B_n)\big) = 2\sum_{k=1}^{N} c_k(B_n).$$

En effet, $c_0(B_n) = 0$ et $c_k(B_n) = c_{-k}(B_n) = -\dfrac{(2p)!}{(2i\pi)^{2p}} \times \dfrac{1}{k^{2p}}$, pour tout $k \geq 1$, car $k^n = (-k)^n$ (car n est pair). Ainsi :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k(B_n) = -2\frac{(2p)!}{(2i\pi)^{2p}}\zeta(2p).$$

Par le théorème de Dirichlet, cette limite vaut aussi b_{2p} donc :

$$\zeta(2p) = \frac{(2i\pi)^{2p}}{-2(2p)!} b_{2p} = (-1)^{p+1}\frac{2^{2p-1}\pi^{2p}}{(2p)!} b_{2p}.$$

19. On a $b_2 = 1/6$. Donc,

$$\zeta(2) = (-1)^2 \frac{2^1\pi^2}{2!}\frac{1}{6} = \frac{\pi^2}{6}.$$

20. On a $b_4 = -1/30$. Donc,

$$\zeta(4) = (-1)^3 \frac{2^3\pi^4}{(4!)} \times (-1/30) = \frac{8}{24\times 30}\pi^4 = \frac{\pi^4}{90}.$$