DM 5 - Théorème de Dirichlet et valeurs paires de ζ - reprise

1 Théorème de Dirichlet

1.1 Noyau de Dirichlet

1. Quand la fonction est définie sur $\mathbb{R}$, il n'y a pas besoin de préciser que l'ensemble de définition est symétrique et 2π-périodique.
   Si $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $t \mapsto e^{ikt}$ est continue (car ses parties réelle et imaginaire le sont). Nul besoin de transformer la somme en une somme de cosinus.

2. Une primitive de $t \mapsto e^{ikt}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{ik}e^{ikt}$ (si $k \neq 0$). Se ramener à cos et sin est une perte de temps.

3. De nouveau, le calcul est plus rapide si on part de l'expression initiale. Il n'y a pas non plus besoin de faire de changement d'indice dans la somme : la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique est vraie sans modification, même avec une partie des indices négatifs.

1.2 Théorème de Dirichlet

4. Pour cette question et la suivante, quelques manipulations utilisant linéarité, périodicité, parité... Chaque étape est élémentaire mais à justifier clairement.

5. RAS

6. On n'écrit jamais lim quand on n'a pas montré l'existence de ladite limite. Il est plus agréable et rigoureux d'écrire un calcul dépendant de t, puis de passer à la limite *une fois qu'on peut appliquer les opérations élémentaires sur les limites.*

7. Il s'agissait essentiellement de justifier l'égalité des fonctions intégrées en 0.

8. Quand on utilise le fait qu'une fonction h, il est presque toujours mieux de majorer $|h|$, plutôt que de prendre un minorant et un majorant de h. En effet, le plus souvent dans ce genre d'inégalités, ce qui compte, c'est le *poids absolu* de h, indépendamment de son signe.

   Il était possible, comme j'ai lu dans certaines copies, d'utiliser que $\delta \mapsto \int_0^\delta h(t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)dt$ est une fonction continue qui s'annule en 0, on sait en effet que cette fonction est même dérivable, par le théorème fondamental.

9. Les calculs sont souvent trop vagues après l'IPP. Il ne suffit pas de dire qu'une suite de fonctions tend vers 0 (en quel sens ? vous verrez l'an prochain qu'il y a de nombreuses interprétations possibles...) pour dire que la suite des intégrales correspondantes tend vers 0. Voir le corrigé pour les détails.

10. Bien fait dans l'ensemble. Pas de grande difficultés ; il faut juste s'habituer à manier proprement les variables.

2 Application aux valeurs paires de ζ

2.1 Polynômes de Bernoulli

11. Si on veut être rigoureux, ce genre de questions est un peu pénible à rédiger. On peut traiter l'existence et l'unicité en même temps, au sein d'une démonstration par récurrence, cf. corrigé. Attention ! dans de nombreuses copies, l'argument se limite à la justification que deux telles suites sont nécessairement égales. Ceci justifie l'unicité, par l'existence.

12. RAS

2.2 Calcul des coefficients de Fourier

13. RAS

14. RAS

15. Il est préférable d'écrire un produit téléscopique pour justifier le calcul en deux lignes, plutôt que de faire une récurrence (ça prend du temps) ou de conclure *par une récurrence immédiate* (attendez vous à ne pas avoir les points).

16. RAS

17. RAS

18. RAS

19. RAS – il est bon de connaître cette valeur.

20. Quelques erreurs de calcul.