DM 7 - Nombres de Stirling, nombres de Catalan

Exercice 1. – *Nombre de surjections, par la formule du crible*

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On cherche à déterminer le nombre $S(n,p)$ de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$. Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on note $A_k \subset \mathscr{F}\left([\![1,n]\!],[\![1,p]\!]\right)$ l'ensemble des fonctions f pour lesquelles k n'a pas d'antécédent.

1. Soient $i_1,\dots,i_k$ des indices deux à deux distincts dans $[\![1,p]\!]$.
   Interpréter l'ensemble $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ et en déduire son cardinal.

2. On note $\mathscr{S}(n,p)$ l'ensemble des surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.
   Exprimer $\mathscr{S}(n,p)$ en fonction des A_k.

3. En utilisant la formule du crible, en déduire que $S(n,p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.

Exercice 2. – *Nombres de Stirling*

On garde les notations de l'exercice précédent.

1. **Nombres de Stirling de deuxième espèce.** Pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{P}(n,k)$ l'ensemble des partitions de $[\![1,n]\!]$ en k parties et $\left\{ n \atop k \right\}$ le nombre de telles partitions de $[\![1,n]\!]$.

   (a) Montrer que pour tous $n \geq 2$ et $k \in [\![1,n]\!]$, $\left\{ n \atop k \right\} = k\left\{ n-1 \atop k \right\} + \left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$.

   Pour tout réel x et tout entier n, on note

   $$x^{\underline{n}} = x(x-1)\dots(x-n+1).$$

   (b) En déduire que, pour tout x réel et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$x^n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}}.$$

   (c) Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$, soit $f \in \mathscr{S}(n,k)$. On note P_f la partition de $[\![1,n]\!]$, associée à la relation d'équivalence $\mathscr{R}_f$ sur $[\![1,n]\!]$:

   $$\forall i, j \in [\![1,n]\!], i \mathscr{R}_f j \iff f(i) = f(j).$$

   Montrer que $P_f \in \mathscr{P}(n,k)$.

   (d) On considère $\Phi : \mathscr{S}(n,k) \to \mathscr{P}(n,k)$, définie par $\Phi(f) = P_f$. Montrer que Φ est surjective et que tout $P \in \mathscr{P}(n,k)$ a exactement $k!$ antécédents par Φ.

(e) En déduire que $\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\} = \frac{1}{k!} S(n,k)$.

(f) Écrire la formule obtenue en (b) pour $x = p$ un entier naturel en termes des $S(n,k)$. L'interpréter combinatoirement.

2. **Nombres de Stirling de première espèce**[1]

Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$. On note

$$E = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid \forall i \neq j \in [\![1,n]\!], x_i \neq x_j\right\}.$$

Pour alléger les notations, on identifie deux indices congrus modulo n. Par exemple, x_{n+1} désigne x_1 et x_{2n} désigne x_n. On introduit sur E la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ définie par

$$(x_1, \dots, x_n) \mathscr{R} (y_1, \dots, y_n) \iff \exists \ell \in [\![1,n]\!] : \forall i \in [\![1,n]\!], x_i = y_{i+\ell}.$$

Ainsi, pour $n = 3$, le triplet $(1,2,3) \in E$ est en relation avec $(2,3,1)$ et $(3,1,2)$, mais pas avec $(1,3,2)$.

- On appelle n-cycle une classe d'équivalence pour $\mathscr{R}$ et on note $[x_1, \dots, x_n]$ le n-cycle égal à la classe d'équivalence de $(x_1, \dots, x_n)$.
- Le support d'un n-cycle $[x_1, \dots, x_n]$ est l'ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$. Il ne dépend pas de l'écriture choisie pour le n-cycle. On note $\mathrm{Supp}(C)$ le support d'un cycle C.
- Une partition en cycles de $[\![1,n]\!]$ est un ensemble de cycles $\mathscr{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ tel que $\mathscr{P} = \{\mathrm{Supp}(C_1), \dots, \mathrm{Supp}(C_k)\}$ est une partition de $[\![1,n]\!]$. On note $\mathscr{P} = \mathrm{Supp}(\mathscr{C})$.

On note $\mathscr{C}(n,k)$ l'ensemble des partitions en cycles de $[\![1,n]\!]$, dont le support est de cardinal k. On note $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = |\mathscr{C}(n,k)|$.

(a) Soient $x_1, \dots, x_k$ des entiers naturels deux à deux distincts. Combien y a-t-il de cycles de support $\{x_1, \dots, x_k\}$?

(b) Soit $\mathscr{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ une partition de $[\![1,n]\!]$ en k parties. On note $n_i = |P_i|$. Combien y a-t-il de partitions en cycles de support $\mathscr{P}$?

(c) Illustrer graphiquement toutes les partitions et partitions en cycles de $[\![1,3]\!]$.

(d) En considérant $\Psi : \mathscr{C}(n,k) \to \mathscr{P}(n,k)$, définie par $\Psi(\mathscr{C}) = \mathrm{Supp}(\mathscr{C})$, montrer que pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \geq \left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}$. Montrer que l'égalité a lieu ssi $k \geq n-1$.

(e) Montrer que pour tous $n \geq 2$ et $k \in [\![1,n]\!]$, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$.

Pour tout réel x et tout entier n, on note $x^{\overline{n}} = x(x+1)\dots(x+n-1)$.
On admet qu'on pourrait montrer, comme en 1.b), que pour tout réel x et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

[1] Pour les plus motivé.e.s, ne sera pas corrigé.

(f) Quelle formule obtient pour $x = 1$?[2]

(g) Après avoir établi une relation entre $x^{\underline{n}}$ et $(-x)^{\overline{n}}$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k.$$

(h) En déduire que, pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=m}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{k-m} = \delta_{m,n},$$

où $\delta_{m,n} = 1$ si $m = n$ et 0 sinon.

Exercice 3. – *Nombres de Catalan*

Les nombres de Catalan sont des nombres entiers intervenant dans un grand nombre de problèmes de nature combinatoire. On se propose d'étudier certains de ces problèmes.

1. **Chemins vers le nord-est**.
Soient (a, b) et (c, d) deux points du plan, à coordonnées entières, tels que $a \leq c$ et $b \leq d$. On appelle chemin vers le nord-est de (a, b) vers (c, d) une liste de points $\big((x_0, y_0), \ldots, (x_N, y_N)\big)$ telle que $(a, b) = (x_0, y_0)$, $(c, d) = (x_N, y_N)$ et

$$\forall k \in [\![0, N-1]\!], (x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k + 1) \text{ ou } (x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k + 1, y_k).$$

(a) Quelle est la valeur de N dans la définition précédente ? Combien y a-t-il de chemins vers le nord-est de (a, b) vers (c, d) ?

(b) Soient $a > b$ deux entiers naturels. Montrer qu'il y a autant de chemins vers le nord-est de $(1, 0)$ vers (a, b) touchant la diagonale $(x = y)$ que de chemins vers le nord-est de $(0, 1)$ vers (a, b).

(c) En déduire que le nombre de chemins vers le nord-est de $(1, 0)$ vers (a, b) ne touchant pas la diagonale est $\dfrac{a-b}{a+b}\dbinom{a+b}{a}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère désormais les chemins vers le nord-est de $(0, 0)$ vers (n, n) tels que chaque point (x_k, y_k) du chemin vérifie $y_k \leq x_k$. On note C_n le nombre de tels chemins : c'est le n-ème nombre de Catalan.

(d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \dfrac{1}{2n+1}\dbinom{2n+1}{n} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

(e) Montrer à partir de la définition des nombres C_n que $\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

2. **Un calcul d'intégrales**[3]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $m_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-2}^{2} x^n \sqrt{4 - x^2}\, dx$.

[2] On en donnera une interprétation plus tard dans l'année.

[3] D'après Centrale 1 MP 2021.

(a) Que vaut m_n si n est un entier impair ?

(b) Calculer m_0, en utilisant un changement de variable.

(c) Soit n un entier naturel pair. Déterminer une relation simple entre m_n et m_{n+2}.

(d) En déduire la valeur de m_n, pour tout entier naturel n pair.

3. **Asymptotique des nombres de Catalan.** On cherche à déterminer l'ordre de grandeur de C_n, quand n tend vers $+\infty$.

   (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$4\left(\frac{n-1}{n}\right)^{3/2} \leq \frac{C_n}{C_{n-1}} \leq 4\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3/2}.$$

   On considère la suite u définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{4^n}{n\sqrt{n}}$.

   (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{C_n}{u_n} \leq \dfrac{3}{4}$.

   (c) En admettant la formule de Stirling $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{C_n}{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

4. **Triangulation de polygones.** Dans une lettre adressée à Golbach en 1751, Euler considère le problème suivant :
   Étant donné un entier $n > 3$ et un polygone convexe à n côtés, de combien de façons E_n peut-on en relier les sommets par des diagonales ne s'intersectant pas, de sorte à le découper en triangles.[4]

   (a) Représenter tous les découpages possibles pour un carré et un pentagone régulier.

   Euler a déterminé (sans erreur !) le bon nombre de découpages jusqu'à $n = 10$. Il a aussi conjecturé la formule

$$E_n = \frac{2 \times 6 \times \cdots \times (4n-10)}{(n-1)!}$$

   mais il n'est pas parvenu à la démontrer.

   (b) Démontrer la conjecture d'Euler.

[4] La forme du polygone convexe est sans importance ; on pourra le supposer régulier. Il faut tracer $n-3$ diagonales et on découpe le polygone en $n-2$ triangles.