# DM 8 - Loi de réciprocité quadratique

Dans tout le sujet, $p$ désigne un nombre premier impair. Un entier $a$ non divisible par $p$ est un carré modulo $p$ s'il existe un entier $n$ tel que $a \equiv n^2\,[p]$.

## 1 Symbole de Legendre

Pour tout entier $a$, on note $\left(\frac{a}{p}\right)$ le symbole de Legendre défini par

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ divise } a\,; \\ 1 & \text{si } a \text{ est un carré modulo } p\,; \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que si $a \equiv b\,[p]$, alors $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$.

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ non divisible par $p$, on note $r_p(x) \in [\![1, p-1]\!]$ son reste dans la division euclidienne par $p$. On définit $\theta_p : [\![1, p-1]\!] \to [\![1, p-1]\!]$ par $\theta_p(x) = r_p(x^2)$.

2. Identifier l'image de $\theta_p$ et montrer que chacun des éléments de l'image a exactement deux antécédents par $\theta_p$.

3. En déduire que parmi les entiers de $[\![1, p-1]\!]$, exactement $\frac{p-1}{2}$ sont des carrés modulo $p$.

4. Montrer que pour tout $a \in [\![1, p-1]\!]$, $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1\,[p]$.

On admet[1] que l'ensemble des $a \in [\![1, p-1]\!]$ tels que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\,[p]$ a pour cardinal au plus $\frac{p-1}{2}$.

5. **Critère d'Euler.**

   (a) Montrer le critère d'Euler :
   $$\forall a \in \mathbb{Z}, \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}}\,[p].$$

   (b) En déduire que pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$.

   (c) En limitant les calculs, déterminer si 5 est un carré modulo 23.

   (d) Expliciter le critère d'Euler pour $a = -1$.

On note $S_p = \{1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$.

[1] C'est une conséquence du fait que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps et du cours à venir sur les polynômes.

6. **Un (autre) lemme de Gauss.** Soit $a \in \mathbb{Z}$, non divisible par $p$.

   (a) Montrer que pour tout $s \in S_p$, il existe un unique couple $(e_s(a), s_a) \in \{\pm 1\} \times S_p$ tel que $as \equiv e_s(a)s_a\,[p]$.

   (b) Montrer que l'application $f : S_p \to S_p$ est une bijection.

   (c) En considérant le produit $\prod_{s\in S_p} s$, montrer que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \prod_{s\in S_p} e_s(a)\,[p]$.

   (d) En déduire le lemme de Gauss :

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \prod_{s\in S_p} e_s(a).$$

7. On cherche à déduire du lemme de Gauss la valeur de $\left(\frac{2}{p}\right)$.

   (a) A quelle condition sur $s \in S_p$, a-t-on $2s \in S_p$ ? En déduire que $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{n(p)}$, où $n(p)$ est le nombre d'entiers $u$ tels que $\frac{p-1}{4} < u \leq \frac{p-1}{2}$.

   (b) Calculer $n(p)$, selon que $p$ est congru à 1, $-1$, 3 ou $-3$ modulo 8.

   (c) En déduire que $\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv \pm 1\,[8]\,; \\ -1 & \text{si } p \equiv \pm 3\,[8]. \end{cases}$

   En guise d'application, montrons qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à $-1$ modulo 8. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il y a un ensemble fini $\{p_1, \ldots, p_n\}$ de tels nombres premiers. On note $N = (4p_1 \ldots p_n)^2 - 2$.

   (d) Montrer que tous les diviseurs premiers impairs $p$ de $N$ sont tels que $p \equiv \pm 1\,[8]$.

   (e) Aboutir à une contradiction, en considérant $\frac{N}{2}$.

La loi de réciprocité quadratique dont une preuve est proposée à la section suivante affirme que si $p$ et $q$ sont deux nombres premiers impairs distincts, alors

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

Autrement dit, si $p$ ou $q$ est congru à 1 modulo 4, alors $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$ ; sinon $\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right)$.
Couplée avec la multiplicativité du symbole de Legendre (question 5.b) et les calculs de $\left(\frac{-1}{p}\right)$ et $\left(\frac{2}{p}\right)$ (questions 5.d et 7.c), la loi de réciprocité quadratique permet de calculer rapidement $\left(\frac{a}{p}\right)$, pour un entier $a$ quelconque.

8. Déterminer pour quels premiers impairs $p$, 3 est un carré modulo $p$.

9. Montrer que 101 n'est pas un carré modulo 641.

## 2 Une démonstration de la loi de réciprocité quadratique

Une première démonstration de la loi de réciprocité quadratique a été donnée par Gauss en 1801. Nous suivons celle donnée par Eisenstein en 1845.

10. Soit $m = 2n+1$ un entier naturel impair. On cherche à montrer l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \frac{\sin(mx)}{\sin x} = (-4)^n \prod_{j=1}^{n} \left( \sin^2 x - \sin^2 \frac{2\pi j}{m} \right).$$

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \frac{\sin(mx)}{\sin x} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{2j+1} (-1)^j (\sin^2 x)^j (1-\sin^2 x)^{n-j}$.

On considère le polynôme $P = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{2j+1} (-1)^j X^j (1-X)^{n-j}$.

(b) Montrer que les réels $\sin^2 \frac{2\pi j}{m}$, pour $j \in [\![1, n]\!]$, sont des racines distinctes de $P$.

(c) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda \prod_{j=1}^{n} \left( X - \sin^2 \frac{2\pi j}{m} \right)$.

(d) Identifier la valeur de $\lambda$ et conclure.

Soient $p$ et $q$ deux nombres premiers impairs distincts. On rappelle qu'on note $S_p = \{1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ et $S_q = \{1, \ldots, \frac{q-1}{2}\}$.

11. En utilisant le lemme de Gauss, montrer que $\left(\frac{q}{p}\right) = \prod_{s \in S_p} \frac{\sin \frac{2\pi qs}{p}}{\sin \frac{2\pi s}{p}}$.

12. En déduire que $\left(\frac{q}{p}\right) = \prod_{s \in S_p} (-4)^{\frac{q-1}{2}} \prod_{t \in S_q} \left( \sin^2 \frac{2\pi s}{p} - \sin^2 \frac{2\pi t}{q} \right)$.

13. Conclure.