DM 9 - Postulat de Bertrand

1 Valuations p-adiques de $\binom{2n}{n}$

1. Comme $n! = \prod_{i=1}^{n} i$, on a $v_p(n!) = \sum_{i=1}^{n} v_p(i)$. Pour $k \geq 1$, notons A_k le cardinal de $\{i \in [\![1,n]\!] \mid v_p(i) = k\}$. On a donc, en regroupant les entiers i de même valuation :

$$v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} k A_k.$$

La somme est finie car $A_k = \emptyset$ si $p^k > n$.

Notons B_k le cardinal de $\{i \in [\![1,n]\!] \mid v_p(i) \geq k\}$. C'est le nombre d'éléments de $[\![1,n]\!]$ divisibles par p^k et il y en a $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$. Comme, $A_k = B_k - B_{k+1}$, il vient :

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \sum_{k \geq 1} k(B_k - B_{k+1}) \\ &= \sum_{k \geq 1} kB_k - \sum_{l \geq 2} (l-1)B_l \\ &= \sum_{k \geq 1} B_k - \sum_{k \geq 1} (k-1)B_k \\ v_p(n!) &= \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor. \end{aligned}$$

2. On a $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. En prenant la valuation p-adique :

$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = v_p\big((2n)!\big) - 2v_p(n!).$$

Le résultat se déduit alors de la formule de Legendre.

3. Soit x un réel positif. On souhaite comparer $\lfloor 2x \rfloor$ et $2\lfloor x \rfloor$. Par définition de la partie entière, on a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Donc,

$$2\lfloor x \rfloor \leq 2x < 2\lfloor x \rfloor + 2.$$

Comme $2\lfloor x \rfloor$ et $2\lfloor x \rfloor + 2$ sont des entiers, on en déduit que $\lfloor 2x \rfloor$ est égal à $2\lfloor x \rfloor$ ou à $2\lfloor x \rfloor + 1$.

En appliquant ce résultat à $x = \dfrac{n}{p^k}$, pour $k = 1$, on obtient que chaque terme de la somme vaut 0 ou 1.

Si $p^k > 2n$, on a en particulier $p^k > n$. Donc les parties entières $\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$ et $\lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor$ sont nulles.

4. Notons $r = \max\{k \in \mathbb{N} \mid p^k \leq 2n\}$. On a donc :

$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = \sum_{k=1}^{r} \lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor \leq \sum_{k=1}^{r} 1 = r.$$

Si $p > \sqrt{2n}$, alors $\max\{k \in \mathbb{N} \mid p^k \leq 2n\} = 1$. Donc la $v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = 1$, pour $p > \sqrt{2n}$.

5. Si $p > 2n/3$, on a $p^2 > 4n^2/9$ et donc $p^2 > 2n$ dès que $2n > 9$, c'est-à-dire dès que $n \geq 5$. Supposons donc $n \geq 5$. On a donc :

$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = \lfloor 2n/p \rfloor - 2\lfloor n/p \rfloor.$$

Comme $2n/3 < p \leq n$, on a $3/2n > 1/p \geq 1/n$. D'où l'on déduit que $\lfloor n/p \rfloor = 1$ et $\lfloor 2n/p \rfloor = 2$. Ainsi, $v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = 0$.

Pour $n = 3$ et $n = 4$, on calcule directement. Dans les deux cas, le seul premier p concerné est $p = 3$. Or, $\binom{6}{3} = 20$ et $\binom{8}{4} = 70$ et aucun n'est divisible par 3.

2 Minoration de $\prod_{n<p\leq 2n} p$

6. Si p est un nombre premier tel que $p > 2n$, alors p ne divise pas $\binom{2n}{n}$ (*C'est direct en remarquant que p doit diviser le numérateur* $(2n)!$ *et découle aussi de ce qui a été dit précédemment avec la formule de Legendre*). Donc, dans la décomposition en facteurs premiers de $\binom{2n}{n}$, on peut ne considérer que les nombres premiers inférieurs à $2n$.

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p\leq 2n} p^{\alpha_p}.$$

On décompose ensuite le produit selon que $p \leq \sqrt{2n}$, $p \in]\sqrt{2n}, 2n/3]$, $p \in]2n/3, n]$ ou $p \in]n, 2n]$. Il faut cependant prendre garde à ce qui se passe quand $\sqrt{2n} \geq 2n/3$. C'est équivalent à $9 \geq 2n$, donc à $n = 3$ ou $n = 4$. Les nombres premiers dans l'intervalle $]2n/3, \sqrt{2n}]$ sont comptés une fois dans le premier produit et une autre fois dans le troisième. Mais il n'y en fait aucun nombre premier (car aucun nombre entier) dans ces intervalles ; donc l'égalité est satisfaite aussi dans ces cas.

Les inégalités sont obtenus en appliquant les résultats de la section précédente :

- Si $p \leq \sqrt{2n}, p^{\alpha_p} \leq 2n$ (question 4), donc $\displaystyle\prod_{p \leq \sqrt{2n}} p^{\alpha_p} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} (2n)$.
- Si $p > \sqrt{2n}$, on sait que α_p vaut 1.
- Enfin, si $p \in]2n/3, n]$, on sait que α_p vaut 0, donc le troisième produit disparait.

7. Il y a au plus $\sqrt{2n}$ nombres premiers p tels que $p \leq \sqrt{2n}$. Donc,

$$P_1(n) = \prod_{p\sqrt{2n}} 2n \leq (2n)^{\sqrt{2n}}.$$

8. **Minoration de $\binom{2n}{n}$.**

(a) Soit $k \in [\![0, 2n-1]\!]$. On calcule :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\frac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!}}{\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}} = \frac{2n-k}{k+1}.$$

Ainsi, $u_{k+1} \geq u_k \iff 2n - k \geq k+1 \iff k \leq n - \dfrac{1}{2} \iff k < n$. On en déduit que $(u_k)_k$ est croissante jusqu'à la valeur $u_n = \dbinom{2n}{n}$ et décroissante ensuite. Donc, $\dbinom{2n}{k}$ est maximal pour $k = n$.

(b) Par la formule du binôme de Newton, on a

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2^{2n} = 4^n.$$

Comme chaque terme est majoré par $\dbinom{2n}{n}$, on a donc :

$$4^n \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{n} = (2n+1)\binom{2n}{n}.$$

On cherche une inégalité légèrement plus précise ($2n$ au lieu de $2n+1$). Pour cela, on remarque que les deux termes extrêmes de la somme valent 1, donc leur somme vaut 2 est est inférieure à $\dbinom{2n}{n}$. Donc,

$$4^n = 2 + \sum_{k=1}^{2n-1} \binom{2n}{n} \leq (1 + 2n - 1)\binom{2n}{n} = 2n\binom{2n}{n}.$$

D'où la minoration souhaitée.

9. (a) Soit p un nombre premier tel que $m+1 < p \leq 2m+1$. On a $m!\binom{2m+1}{m} = (2m+1)(2m)\ldots(m+2)$. Comme p est l'un des facteurs du membre de droite, il le divise. Comme p ne divise aucun nombre inférieur à m, il est premier à $m!$. Donc, par le lemme de Gauss, p divise $\binom{2m+1}{m}$.

Comme $\binom{2m+1}{m}$ est divisible par tous les premiers p tels que $m+1 < p \leq 2m+1$ (et que ces nombres sont deux à deux premiers entre eux), $\binom{2m+1}{m}$ est divisible par $\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p$. En particulier, on a l'inégalité souhaitée.

(b) Par la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1}.$$

Donc, en ne gardant que les termes centraux : $2^{2m+1} \geq \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} = 2\binom{2m+1}{m}$, par la formule de symétrie.

On en déduit la formule annoncée.

(c) On le démontre par récurrence forte sur m. Les cas $m = 1$ et $m = 2$ sont immédiats. Supposons la propriété montrée pour tout entier $m < M$, avec $M \geq 3$. On veut montrer que $\prod_{p\leq M} p \leq 4^{M-1}$. On distingue deux cas, selon la parité de M :

- Si M est pair, alors M n'est pas premier. Donc, $\prod_{p\leq M} p = \prod_{p\leq M-1} \leq 4^{M-2} < 4^{M-1}$, l'hypothèse de récurrence étant utilisée pour $M-1$.
- Si M est impair, on l'écrit $M = 2m+1$. On a alors :

$$\prod_{p\leq M} p = \prod_{p\leq m+1} p \cdot \prod_{m+1<p\leq 2m+1} p.$$

Par hypothèse de récurrence, le produit de gauche est majoré par 4^m. Par les deux questions précédentes, celui de droite est majoré par 4^m également. Donc,

$$\prod_{p\leq M} p \leq 4^{2m} = 4^{M-1}.$$

Ceci conclut la récurrence.

(d) On a $P_2(n) = \prod_{\sqrt{2n}<p\leq 2n/3} p \leq \prod_{p\leq \lfloor 2n/3 \rfloor} p$. Par l'inégalité précédente, on a donc :

$$P_2(n) \leq 4^{\lfloor 2n/3 \rfloor - 1} \leq 4^{2n/3}.$$

L'inégalité est en fait stricte.

10. On rassemble les inégalités obtenues aux questions 6, 7, 8*b*) et 9*c*). On a donc :

$$P_3(n) \geq \frac{\binom{2n}{n}}{P_1(n)P_2(n)} \geq \frac{\frac{4^n}{2n}}{4^{2n/3}(2n)^{\sqrt{2n}}} = \frac{4^{n/3}}{(2n)^{1+\sqrt{2n}}}.$$

3 Conclusions effective et asymptotique

11. Soit $a \geq 1$ un entier. Par la formule du binôme :

$$2^a = \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} = 1 + a + \sum_{k=2}^{a} \binom{a}{k} \geq 1 + a.$$

12. Soit $n \geq 3$.

$$2n = (\sqrt[6]{2n})^6 < (\lfloor \sqrt[6]{2n} \rfloor + 1)^6 \leq (2^{\lfloor \sqrt[6]{2n} \rfloor})^6 = 2^{6\lfloor \sqrt[6]{2n} \rfloor} \leq 2^{6\sqrt[6]{2n}}.$$

13. Soit $n \geq 50$. On a $\sqrt{2n} > 9$ donc $6 < \dfrac{2}{3}\sqrt{2n}$. On élève l'inégalité obtenue à la question précédente à la puissance $1 + \sqrt{2n}$:

$$(2n)^{1+\sqrt{2n}} < 2^{\sqrt[6]{2n}(6+6\sqrt{2n})} < 2^{\sqrt[6]{2n}(\frac{2}{3}\sqrt{2n}+6\sqrt{2n})} = 2^{\frac{20}{3}\sqrt[6]{2n}\sqrt{2n}} = 2^{\frac{20}{3}(2n)^{2/3}}.$$

14. On reprend l'inégalité trouvée question 10. On a donc :

$$\prod_{n<p\leq 2n} p > \frac{4^{n/3}}{2^{\frac{20}{3}(2n)^{2/3}}} = 2^{\frac{2n-20(2n)^{2/3}}{3}},$$

en réécrivant $4^{n/3}$ en $2^{2n/3}$.

15. Soit $n \geq 50$. On a les équivalences :

$$2n - 20(2n)^{2/3} \geq 0 \iff (2n)^{1/3} \geq 20 \iff 2n \geq 8000 \iff n \geq 4000.$$

Par la question précédente, si $n \geq 4000$, on a donc :

$$\prod_{n<p\leq 2n} p > 2^0 = 1.$$

Donc, il y a au moins un nombre premier compris entre n et $2n$.

16. Considérons la suite des nombres suivants :

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001.$$

On vérifie que chacun de ces nombres est premier et que chacun est inférieur au double du précédent. Étant donné un entier $n \leq 4000$, soit p le plus grand nombre de cette liste tel que $p \leq n$. Alors le nombre premier q suivant dans la liste est tel que $n < q \leq 2n$.

Ceci conclut les cas résiduels et achève la démonstration du postulat de Bertrand.

17. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les équivalences :

$$20(2n)^{2/3} < \varepsilon n \iff 20 \cdot 2^{2/3} < \varepsilon n^{1/3} \iff n > \frac{32000}{\varepsilon^3}.$$

Donc $N(\varepsilon) = \lfloor \frac{32000}{\varepsilon^3} \rfloor + 1$ convient.

18. Dans le produit $\prod_{n<p\leq 2n} p$, chaque facteur est inférieur à $2n$ et il y a par définition $A(n)$ facteurs. Donc,

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \leq (2n)^{A(n)}.$$

19. Si $n \geq N(\varepsilon)$, on a

$$(2n)^{A(n)} \geq \prod_{n<p\leq 2n} p \geq 2^{n(2/3-\varepsilon)}.$$

On passe au logarithme et on obtient :

$$A(n)\ln(2n) \geq n(\frac{2}{3} - \varepsilon)\ln 2.$$

Comme $\ln(2n) = \ln n + \ln 2$, on a finalement :

$$A(n) \geq (\frac{2}{3} - \varepsilon)\ln 2 \frac{n}{\ln n + \ln 2}.$$

Remarque : l'inégalité est vraie mais l'énoncé aurait été plus naturel avec $\varepsilon/3$ au lieu de ε.

20. Soit C tel que $0 < C < \frac{2\ln 2}{3}$. Fixons $\varepsilon > 0$ tel que $C < (\frac{2}{3} - \varepsilon)\ln 2$. Le quotient $Q(n)$ de $(\frac{2}{3} - \varepsilon)\ln 2 \frac{n}{\ln n + \ln 2}$ et de $\frac{n}{\ln n}$ tend vers $(\frac{2}{3} - \varepsilon)\ln 2$. Donc, il existe $N \in \mathbb{N}$ (dépendant de C) tel que, pour $n \geq N$, on a $Q(n) \geq C$.

    Pour $n \geq N$, on a alors $A(n) \geq C\frac{n}{\ln n}$.

21. On trouve $\frac{2\ln 2}{3} \cong 0,46$. Pour tout nombre C strictement inférieur à ce nombre, on a montré qu'il existait un rang à partir duquel $A(n) \geq C\frac{n}{\ln n}$. En réalité, le théorème des nombres premiers montre que le résultat reste vrai pour tout $C < 1$ (mais est faux pour tout $C > 1$)

    Autrement dit, notre minoration est optimale, à un facteur environ égal à 2 près. Au vu des nombreuses approximations faites, il est remarquable que la minoration finalement obtenue soit aussi précise.