DM 9 - Postulat de Bertrand

En 1845, Joseph Bertrand conjecture le théorème suivant :
Pour tout entier $n > 1$, il existe un nombre premier p tel que $n < p \leq 2n$.

Ce théorème est démontré par Pafnouti Tchebychev en 1850. D'autres preuves ont été données depuis. Nous suivons dans ce problème celle donnée par Paul Erdős, en 1932. Le fil conducteur de la démonstration est une étude fine de la décomposition en facteurs premiers du coefficient binomial $\binom{2n}{n}$.

1 Valuations p-adiques de $\binom{2n}{n}$

Soit $n > 1$ et soit p un nombre premier.

1. Montrer la formule de Legendre :
$$v_p(n!) = \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$
2. En déduire que
$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = \sum_{k\geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right).$$
3. Montrer que chaque terme de cette somme est égal à 0 ou 1 et qu'il est nul si $p^k > 2n$.
4. En déduire que
$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) \leq \max\{k \in \mathbb{N} \mid p^k \leq 2n\}.$$
Que peut-on en déduire si $p > \sqrt{2n}$?
5. Montrer que si $n \geq 3$ et si $\frac{2n}{3} < p \leq n$, alors $v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = 0$.

2 Minoration de $\prod_{n<p\leq 2n} p$

Soit $n \geq 3$.

6. Pour tout nombre premier p, on note $\alpha_p = v_p\left(\binom{2n}{n}\right)$. Justifier l'égalité et l'inégalité suivantes :

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p\leq\sqrt{2n}} p^{\alpha_p} \cdot \prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2n}{3}} p^{\alpha_p} \cdot \prod_{\frac{2n}{3}<p\leq n} p^{\alpha_p} \cdot \prod_{n<p\leq 2n} p^{\alpha_p}$$
$$\leq \prod_{p\leq\sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2n}{3}} p \cdot \prod_{n<p\leq 2n} p.$$

Dans tous ces produits, il est implicite que la variable p désigne un nombre premier.

On note $P_1(n) = \prod_{p\leq\sqrt{2n}} 2n$, $P_2(n) = \prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2n}{3}} p$ et $P_3(n) = \prod_{n<p\leq 2n} p$.

Nous cherchons une minoration de $P_3(n)$ et allons établir pour ce faire une majoration de $P_1(n)$ et $P_2(n)$ et une minoration de $\binom{2n}{n}$.

7. Montrer que $P_1(n) \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$.

8. **Minoration de $\binom{2n}{n}$.** Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on note $u_k = \binom{2n}{k}$.

   (a) Comparer u_k et u_{k+1} pour $k \in [\![0, 2n-1]\!]$. En déduire que
   $$\forall k \in [\![0, 2n]\!], \binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}.$$

   (b) En déduire que $\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}$.

9. **Majoration de $P_2(n)$.** Pour obtenir une majoration de $P_2(n)$, on va en fait majorer le produit $\prod_{p\leq m} p$, où $m \geq 2$ est un entier.

   (a) Soit $m \geq 1$ un entier. En considérant la décomposition en facteurs premiers de $\binom{2m+1}{m}$, montrer que $\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m}$.

   (b) Montrer que $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$.

   (c) En déduire, par récurrence sur m, que pour tout entier $m \geq 1$:
   $$\prod_{p\leq m} p \leq 4^{m-1}.$$

   (d) En déduire que $P_2(n) \leq 4^{2n/3}$.

10. Déduire de ces inégalités la minoration suivante de $P_3(n)$:
$$\prod_{n<p\leq 2n} p \geq \frac{4^{n/3}}{(2n)^{1+\sqrt{2n}}}.$$

3 Conclusions effective et asymptotique

Le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. On en déduit immédiatement que le postulat de Bertrand est asymptotiquement vrai :

Il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, il existe un nombre premier p tel que $n < p \leq 2n$.

On va préciser de deux façons différentes cet énoncé pour démontrer le postulat de Bertrand et pour obtenir une minoration asymptotique du nombre de nombres premiers p tels que $n < p \leq 2n$.

11. Montrer que pour tout entier $a \geq 1$, $a+1 \leq 2^a$.
12. En déduire que si $n \geq 3$, $2n \leq 2^{6\sqrt[6]{2n}}$.
13. On suppose $n \geq 50$. En remarquant que $6 < \frac{2}{3}\sqrt{2n}$, montrer que $(2n)^{1+\sqrt{2n}} < 2^{\frac{20}{3}(2n)^{2/3}}$.
14. En déduire que si $n \geq 50$, $\prod_{n<p\leq 2n} p > 2^{\frac{2n-20(2n)^{2/3}}{3}}$.
15. En déduire que si $n \geq 4000$, il existe un nombre premier p tel que $n < p \leq 2n$.
16. Démontrer le postulat de Bertrand. *Il n'y a pas 4000 cas à considérer...*

Pour tout entier n, on note $A(n)$ le nombre de nombres premiers p tels que $n < p \leq 2n$. On cherche à obtenir une minoration asymptotique de $A(n)$.

17. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que
$$\forall n \geq N(\varepsilon), 20(2n)^{2/3} < \varepsilon n.$$
18. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\prod_{n<p\leq 2n} p \leq (2n)^{A(n)}$.
19. En déduire que, si $n \geq N(\varepsilon)$:
$$A(n) \geq (\frac{2}{3} - \varepsilon)\ln 2 \frac{n}{\ln n + \ln 2}.$$
20. En déduire finalement que si $0 < C < \frac{2\ln 2}{3}$:
$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, A(n) \geq C\frac{n}{\ln n}.$$
21. Le *théorème des nombres premiers* permet de montrer que $\frac{A(n)}{\frac{n}{\ln n}}$ tend vers 1, quand n tend vers $+\infty$.

    Commenter la précision de la minoration obtenue sur $A(n)$ par notre méthode.