Arithmétique

1 Divisibilité

Exercice 1. ◐○○ – *Sans congruences*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $7 \mid 3^{105} + 4^{105}$.
2. Montrer que $8 \mid n^3(n^6 - 1)$.
3. Montrer que si n est impair, $24 \mid n(n^2 - 1)$.
4. Montrer que $n^2 \mid (n+1)^n - 1$.

Exercice 2. ◐○○ – *Produit de k entiers successifs*

Montrer que le produit de k entiers successifs est divisible par $k!$.

Exercice 3. ●○○ – $a^b = b^a$

Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$, $a^b = b^a$.

Exercice 4. ●○○ – *Équations simples*

1. Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $n + 1 \mid n^2 + 1$?
2. Pour quels entiers $n \in \mathbb{Z}$ a-t-on $n - 3 \mid n^3 - 3$?

Exercice 5. ♣ – ●◐○ – *Nombres avec des* 1 *et des* 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique nombre k à n chiffres, écrit uniquement avec des 1 et des 2, tel que $2^n \mid k$.

Exercice 6. ●●○ – *Produit de trois entiers consécutifs*

Pour $n \geq 2$, montrer que le produit de trois entiers consécutifs n'est pas une puissance n-ème.

Exercice 7. ♣ – ●●◐ – *Puissances de* 2 *et de* 3

1. Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$: $3^n - 2^m = 1$.
2. Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $2^n \mid 3^n - 1$.

Exercice 8. ●●● – *IMO, 1990*

Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n^2 \mid 2^n + 1$.

2 PGCD, relation de Bézout, nombres premiers entre eux

Exercice 9. ○○○ – *Fraction irréductible*

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fraction $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible.

Exercice 10. ○○○ – *Calculs de pgcd et relations de Bézout*

Calculer le pgcd et une relation de Bézout pour :

1. 151 et 77 ;
2. 1320 et 720.

Exercice 11. ◐○○ – *Calcul de pgcd, expression littérale*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut le pgcd de $2n+1$ et $9n+4$? de $2n-1$ et $9n+4$?

Exercice 12. ●○○ – *Équations linéaires*

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $26x+15y=4$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$: $5x-3y+8z=1$.

Exercice 13. ●○○ – $(n+1)$ *divise* $\dbinom{2n}{n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux. En déduire que $(n+1) \mid \dbinom{2n}{n}$.

Exercice 14. ●○○ – *Puissances de* $1+\sqrt{2}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe a_n et b_n deux entiers tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
2. Montrer que $a_n \wedge b_n = 1$.

Exercice 15. ♣ – ●○○ – *Produit et ppcm fixés*

Soient $P, m \in \mathbb{N}^*$.
A quelles conditions sur P et m existent-ils deux nombres x et y tels que $xy = P$ et $x \vee y = m$?

Exercice 16. ●◐○ – *PGCD des nombres de Fibonacci*

On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On rappelle les formules suivantes, montrées dans un TD précédent, valables pour $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$:

a) $F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$;

b) $F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1}F_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \wedge F_{n+1} = 1$.

2. Montrer que pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, si r est le reste dans la division euclidienne de n par m, alors $F_n \wedge F_m = F_m \wedge F_r$.

3. En déduire, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, la valeur de $F_n \wedge F_m$.

Exercice 17. ♣ – ●●○ – *Relations de Bézout à coefficients positifs*

Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux. On note $A = \{au + bv, (u, v) \in \mathbb{N}^2\}$.

1. Montrer que $ab - a - b \notin A$.

2. Montrer que, pour tout $k > ab - a - b$, $k \in A$.

3 Nombres premiers

Exercice 18. ◐○○ – $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer les équivalences :

$$\sqrt{n} \in \mathbb{N} \iff \sqrt{n} \in \mathbb{Q} \iff \exists k \in \mathbb{N}, n = k^2.$$

Exercice 19. ●○○ – *Ensemble d'entiers successifs sans nombres premiers*

Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une suite de N nombres consécutifs dont aucun n'est premier.

Exercice 20. ●○○ – *Témoins de Fermat*

Montrer qu'un entier $n \geq 2$ n'est pas premier ssi il existe $a \in [\![2, n-1]\!]$ tel que $a^{n-1} \not\equiv 1\,[n]$.

Exercice 21. ♣ – ●○○ – *Nombres premiers jumeaux*

Deux nombres premiers p et q sont jumeaux si $|p - q| = 2$.

1. Montrer que p et q sont jumeaux ssi $pq + 1$ est un carré.

2. Si p et q sont des nombres premiers jumeaux supérieurs à 5, montrer que $p + q \equiv 0\,[12]$.

Exercice 22. ●○○ – *Premiers congrus à* 3 *modulo* 4

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Exercice 23. ●◐○ – *Une équation diophantienne*

Soit p un nombre premier. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$: $x^2 + px = y^2$.

Exercice 24. ♣ – ●◐○ – *L'invasion des Uns*

1. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ deux entiers. Montrer que $n \wedge m = 1$ ssi il existe $k \geq 1$ tel que $n^k \equiv 1\,[m]$.

2. En déduire que tout nombre premier à 10 a un multiple dont l'écriture décimale ne comporte que le chiffre 1.

Exercice 25. ●◐○ – *Nombre, somme et produit des diviseurs*

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n et $S(n)$ la somme des diviseurs de n.

1. Établir une formule pour $\tau(n)$ et $S(n)$ en fonction de la décomposition en facteurs premiers de n.
2. En déduire que τ et S sont des fonctions multiplicatives :
$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, n \wedge m = 1 \implies \tau(nm) = \tau(n)\tau(m) \text{ et } S(nm) = S(n)S(m).$$
3. Montrer que $\tau(n)$ est impair ssi n est un carré parfait.
4. On note $P(n)$ le produit des diviseurs de n. Exprimer $P(n)$ en fonction de n et $\tau(n)$.

Exercice 26. ●◐○ – *Nombres de la forme* $a^n \pm 1$

Soient $a, n \geq 2$.

1. Montrer que si $a^n + 1$ est premier, alors a est pair et n est une puissance de 2.
2. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors n est premier et $a = 2$.

Exercice 27. ♣ – ●◐○ – *Nombres de Fermat*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$ le n-ème nombre de Fermat.

1. Montrer que si $n \neq m$, alors $F_n \wedge F_m = 1$. En déduire une nouvelle preuve de l'infinité des nombres premiers.
2. Montrer que tout facteur premier de F_n est congru à 1 modulo 2^{n+1}.

Exercice 28. ♣ – ●◐○ – *Formule de Legendre*

1. Soit $p \in \mathbb{P}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $v_p(n!) = \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.
2. En déduire que si $m, n \in \mathbb{N}$, alors $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \in \mathbb{N}$.

Exercice 29. ♣ – ●●○ – *Théorème de Wilson*

Montrer que $n \geq 2$ est premier ssi $(n-1)! \equiv -1\,[n]$.

Exercice 30. ♣ – ●●○ – *Premiers congrus à* 1 *modulo* 4

Soit p un nombre premier impair.

1. On suppose que $x^2 = -1\,[p]$ admet une solution. Montrer que $p \equiv 1\,[4]$.
2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.
3. Réciproquement, si $p \equiv 1\,[4]$, montrer que $x = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$ vérifie $x^2 \equiv -1\,[4]$.

Exercice 31. ●●○ – *Nombres de Carmichael*

Un entier n est un nombre de Carmichael s'il n'est pas premier et s'il vérifie la propriété (F) :

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a^n \equiv a\,[n].$$

1. Justifier que les nombres premiers vérifient la propriété (F).
2. Soit $n \geq 2$ sans facteur carré. Soit $m \geq 2$ tel que pour tout diviseur premier p de n, $p-1 \mid m-1$. Montrer que $a^m \equiv a\,[n]$, pour tout $a \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $n = p^2 m$, avec p premier et $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$(1+pm)^n \equiv 1\,[n].$$
4. En déduire qu'un entier n vérifie la propriété (F) ssi il est sans facteur carré et pour tout diviseur premier p de n, $p-1 \mid n-1$.
5. Montrer que 561 est un nombre de Carmichael.

Exercice 32. ●●○ – *Valuation p-adique de $\binom{p^n}{k}$*

Soit $p \in \mathbb{P}$, soit $n \geq 1$, soit $k \in [\![1, p^n - 1]\!]$. Déterminer $v_p\left(\binom{p^n}{k}\right)$.

Exercice 33. ♣ – ●●◐ – *H_n n'est pas un entier.*

Soit $n \geq 2$. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que H_n n'est pas entier.

Exercice 34. ♣ – ●●● – *Minoration de Tchebychev*

1. Montrer que pour tout couple $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $a\binom{a+b}{b}$ divise $\bigvee_{1 \leq i \leq a} (b+i)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1) \bigvee_{0 \leq i \leq n} \binom{n}{i} = \bigvee_{1 \leq i \leq n+1} i$.
3. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\bigvee_{1 \leq i \leq n} i \geq 2^{n-1}$.
4. En déduire une minoration de $\pi_n = \left|\{p \leq n \mid p \text{ premier}\}\right|$.

4 Congruences

Exercice 35. ○○○ – *Résolution de congruences*

1. Quel est le reste de 2020^{2020} dans la division euclidienne par 7 ?
2. Déterminer un x tel que $429x \equiv 1\,[700]$.
3. Résoudre $24x \equiv 3\,[9]$.

Exercice 36. ♣ – ●○○ – *Carré finissant par des* 9

Quel est le nombre maximal de 9 terminant l'écriture décimale d'un carré parfait ?

Exercice 37. ●○○ – *Applications du petit théorème de Fermat*

1. Quel est le reste de la division euclidienne de $2^{70^{71}}$ par 13 ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n^7 \equiv n\,[42]$.
3. Trouver les nombres premiers p tels que p divise $2^p + 1$.
4. Montrer que 13 divise $2^{70} + 3^{70}$.

Exercice 38. ●◐○ – *Différences de puissances*

Déterminer $\min\left\{|36^n - 5^m|, (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$.

Exercice 39. ●◐○ – *Somme de trois carrés*

Soit n un entier somme de trois carrés.

1. Montrer que n n'est pas congru à 7 modulo 8.
2. Montrer plus généralement que n n'est pas de la forme $4^a(8b+7)$, avec $a, b \in \mathbb{N}$.

Exercice 40. ●◐○ – $3^x = 8 + y^2$

Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ une solution de $3^x = 8 + y^2$.

1. Déterminer la parité de x.
2. Conclure.

Exercice 41. ♣ – ●●◐ – *Lemme de Hensel*

1. Soit p un nombre premier impair. Montrer l'équivalence

$$\left(\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 + x + 3 \equiv 0\,[p]\right) \iff \left(\exists y \in \mathbb{Z} : y^2 \equiv -11\,[p]\right).$$

2. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation (E_n) :

$$x^2 + x + 3 \equiv 0\,[n].$$

   (a) Résoudre (E_2) et (E_3).
   (b) En suivant le raisonnement de la première question, résoudre (E_n) pour $n \in \{5, 7, 11\}$.
   (c) Déduire de ce qui précède une résolution de (E_n) dans les cas $n \in \{10, 15, 55, 105\}$.
   (d) Résoudre l'équation (E_n) dans le cas $n = 121$ puis dans les cas $n \in \{25, 125\}$.
   (e) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe deux éléments $a \neq b \in [\![0, 5^k - 1]\!]$ tels que les solutions de (E_{5^k}) soient exactement les entiers congrus à a ou b modulo 5^k.

5 Divers

Exercice 42. ●○○ – *$\mathbb{Z}$ est intégralement clos*

Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ des entiers et $x \in \mathbb{Q}$ tels que $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$. Montrer que $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 43. ♣ – ●○○ – *Somme d'inverses*

Montrer que l'équation $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1000}$ a un nombre fini de solutions entières positives.

Exercice 44. ●●● – *Comment connaître la parité d'un nombre*

Montrer que $n \in \mathbb{N}^*$ est impair ssi n divise $\sum_{k=1}^{n} k^n$.

Exercice 45. ●●● – *Puissances itérées modulo b*

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite a, a^a, a^{a^a}, $a^{a^{a^a}}$,... est stationnaire modulo b.

Indications

Exercice 2. Reconnaître le quotient du produit de k entiers consécutifs par $k!$.

Exercice 15. Raisonner par analyse-synthèse. La condition la plus évidente est $m \mid p$. Est-ce la seule ?

Exercice 17. Pour 2., modifier une relation de Bézout pour un tel k en remarquant que $ab + b(-a) = 0$

Exercice 20. Si $n = ab$, avec $a, b \geq 2$, que dire de a^{n-1} ?

Exercice 22. Raisonner par l'absurde. Si N est le produit de tous ces nombres premiers, considérer $4N - 1$.

Exercice 29. Pour $\Leftarrow$, raisonner par contraposée. Pour $\Rightarrow$, regrouper un entier et son inverse modulo n.

Exercice 33. Considérer la valuation dyadique du numérateur et dénominateur de H_n, écrit sous forme d'une fraction irréductible.

Exercice 36. Regarder modulo 10, puis modulo $100 = 25 \times 4$

Exercice 41. Pour 1., procéder par analogie avec la théorie des équations du second degré sur $\mathbb{R}$.