# Dénombrement

## 1 Échauffement

**Exercice 1.** ◐○○ – *Parties de bridge*

Au bridge, une *main* est un ensemble de 13 cartes tirées dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien de mains différentes y a-t-il ?
2. Quatre joueurs reçoivent des mains. Combien y a-t-il de parties différentes ?

**Exercice 2.** ♣ – ◐○○ – *Une erreur classique de dénombrement*

On demande à un élève de combien de façons on peut obtenir (au moins) deux valeurs identiques quand on lance 3 dés à 6 faces. Son raisonnement est le suivant : *Il y a d'abord* $\binom{3}{2} = 3$ *façons de choisir la paire de dés qui donneront des valeurs identiques. Cette valeur prise par les deux dés est arbitraire entre* 1 *et* 6*. Cela fait* 18 *possibilités. Reste à choisir la valeur du troisième dé :* 6 *valeurs possibles aussi. Pour un total de* $18 * 6 = 108$.

1. Quelle est l'erreur de raisonnement ?
2. Calculer la bonne valeur en comptant plus soigneusement les différents cas possibles.
3. Retrouver cette valeur en comptant les cas contraires.

**Exercice 3.** ◐○○ – *12 personnes autour d'une table*

12 personnes, 6 hommes et 6 femmes, sont réunis pour une soirée festive.

1. De combien de façons peuvent-ils s'asseoir autour d'une table circulaire comportant 12 sièges ?
2. On identifie maintenant deux configurations si on peut passer de l'une à l'autre en déplaçant chaque personne d'un même nombre de sièges (ce qui revient à dire que seul l'ordre relatif des personnes nous intéresse). Combien y a-t-il de façons ?
3. Et si maintenant on ajoute en plus la contrainte que chaque homme ait deux voisines (ce qui implique aisément que chaque femme a deux voisins) ?

**Exercice 4.** ◐○○ – *Petits déjeuners copieux*

Durant $n$ jours consécutifs, vous avez le choix entre pain au chocolat et croissant pour votre petit-déjeuner. De combien de manières pouvez-vous choisir votre viennoiserie :

1. sans aucune contrainte ?

2. en ayant pris au moins une fois chaque viennoiserie ?

3. en ayant pris autant de jours chacune des viennoiseries ?

4. en ne prenant jamais la même viennoiserie deux jours d'affilée ?

5. en ne prenant jamais la même viennoiserie trois jours d'affilée ?

**Exercice 5.** ◐○○ – *Involutions et points fixes*

Une involution d'un ensemble $E$ est une permutation $\sigma : E \to E$ telle que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_E$.
Montrer qu'une involution d'un ensemble fini de cardinal impair a un point fixe.

**Exercice 6.** ♣ – ●○○ – *Couples d'ensembles*

Soit $E$ un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

1. Combien y a-t-il de couples $(A, B)$ de parties de $E$ ?

2. Combien de ces couples vérifient $A \subset B$ ?

3. Combien vérifient $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$ ?

4. Combien vérifient $A \cup B = E$ ?

## 2 Interprétation combinatoire de formules

**Exercice 7.** ●○○ – *Somme des coefficients binomiaux sur une colonne*

Soient $p, n \in \mathbb{N}$. On note $E$ l'ensemble des nombres à $n$ chiffres avec $p$ chiffres 1 et $n - p$ chiffres 2.

1. Quel est le cardinal de $E$ ?

2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Quel est le cardinal de $E_k$, ensemble des nombres dans $E$ dont le dernier 1 est en position $k$ ?

3. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.

**Exercice 8.** ♣ – ●●○ – *Fibonacci n'aimait pas que les lapins*

Une grenouille monte un escalier de $n \geq 1$ marches, par des sauts successifs de 1 ou 2 marches. On note $F_n$ le nombre de façons différentes d'effectuer l'ascension.

1. Montrer que $(F_n)_{n\geq 1}$ est la suite de Fibonacci, définie par $F_1 = 1$, $F_2 = 2$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

2. Soit $k \in \left[\!\left[0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right]\!\right]$. Dénombrer le nombres d'ascensions possibles comportant (exactement) $k$ sauts de 2 marches.

3. En déduire la formule : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} = F_n$. Interprétation graphique ?

**Exercice 9.** ●●○ – *Parties de cardinal pair et impair*

Montrer sans calcul qu'un ensemble fini non vide a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

**Exercice 10.** ♣ – ●●○ – *Des chefs et des sous-chefs*

Soient $k \leq n$ deux entiers naturels. Montrer de façon combinatoire :

$$\binom{n}{k} 2^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}.$$

**Exercice 11.** ♣ – ●●● – *Stars and bars*

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Donner une démonstration combinatoire de

$$\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_p)\in\mathbb{N}^p \\ i_1+\cdots+i_p=n}} i_1 i_2 \ldots i_p = \binom{n+p-1}{2p-1}.$$

## 3 Principe des tiroirs

**Exercice 12.** ●◐○ – *Deux applications du principe des tiroirs*

1. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que si $x_1, \ldots, x_n$ sont des entiers, on peut trouver $I \subset [\![1, n]\!]$ non vide tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ est un multiple de $n$.
2. Soit $\mathscr{R}$ une relation symétrique et anti-réflexive (aucun $x$ ne vérifie $x \mathscr{R} x$) sur un ensemble fini $E$. Montrer qu'il existe $x \neq y$ dans $E$ tels que

$$\left|\left\{z \in E, x \mathscr{R} z\right\}\right| = \left|\left\{z \in E, y \mathscr{R} z\right\}\right|.$$

   Montrer qu'on ne peut pas supprimer l'hypothèse d'anti-réflexivité.

**Exercice 13.** ♣ – ●●◐ – *Théorème d'Erdős-Szekeres*

Soient $r, s \in \mathbb{N}$. Montrer que toute suite d'au moins $(r-1)(s-1)+1$ nombres réels contient une sous-suite croissante de longueur $r$ ou une sous-suite décroissante de longueur $s$.

## 4 Dénombrements divers

**Exercice 14.** ◐○○ – *Nombres de relations*

Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$. Combien y a-t-il de relations binaires sur $E$ ? de relations réflexives ? de relations symétriques ?

**Exercice 15.** ●○○ – *Partitions régulières*

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Soit $E$ un ensemble de cardinal $np$. Déterminer le nombre de partitions de $E$ en $n$ parties de cardinal $p$.

**Exercice 16.** ●○○ – *Listes à somme fixée*

On note $a_n$ le nombre de listes d'entiers naturels non nuls de somme égale à $n$.

1. Calculer $a_1, a_2, a_3$.
2. Démontrer de façon combinatoire la formule $a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$.
3. En déduire $a_n$.

**Exercice 18.** ●◐○ – *Nombres de Bell*

Soit $n$ un entier naturel. Le $n$-ème *nombre de Bell* $B_n$ est défini comme le nombre de partitions d'un ensemble $E$ à $n$ éléments.

1. Donner toutes les partitions possibles d'un ensemble à 0, 1, 2 ou 3 éléments.
   En déduire $B_n$, pour $n \in [\![0,3]\!]$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

**Exercice 19.** ♣ – ●◐○ – *Nombre d'involutions*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n$ le nombre d'involutions de $[\![1,n]\!]$. Déterminer une relation de récurrence satisfaite par la suite $(I_n)$.

**Exercice 20.** ●◐○ – *Une partie dans une partie dans une partie*

Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$. Déterminer le cardinal de

$$\left\{(X,Y,Z) \in \mathscr{P}(E)^3 \mid X \subset Y \subset Z\right\}.$$

**Exercice 21.** ●◐○ – *Applications (strictement) croissantes*

1. Soient $k \leq n$ deux entiers naturels. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ ?
2. Soient $k, n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il y a autant d'applications croissantes de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, que d'applications strictement croissantes de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,n+k-1]\!]$. En déduire le nombre d'applications croissantes de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

**Exercice 22.** ●●○ – *Parties sans entiers consécutifs*

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n/2$. Combien y a-t-il de parties de cardinal $p$ dans $[\![1,n]\!]$, sans entiers consécutifs ?

**Exercice 23.** ♣ – ●●◐ – *Des parties discriminantes*

Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$ et $A_1, \ldots, A_m$ des parties de $E$ vérifiant :

$$\forall x, y \in E, x \neq y \implies \exists i \in [\![1,m]\!] : (x \in A_i \text{ et } y \notin A_i) \text{ ou } (x \notin A_i \text{ et } y \in A_i).$$

Montrer que $m \geq \log_2(n)$.

**Exercice 24.** ♣ – ●●◐ – *Théorème de Sperner sur les antichaînes*

On appelle antichaîne de $\mathscr{P}\big([\![1,n]\!]\big)$ une partie $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}\big([\![1,n]\!]\big)$ vérifiant :

$$\forall X, Y \in \mathscr{A}, X \neq Y \implies X \not\subset Y.$$

1. Montrer qu'il existe une antichaîne de cardinal $\begin{pmatrix} n \\ \lfloor n/2 \rfloor \end{pmatrix}$.

2. On souhaite montrer qu'il s'agit en fait du cardinal maximal d'une antichaîne.

   (a) On appelle chaîne complète de $\mathscr{P}\big([\![1,n]\!]\big)$ une partie $\{C_0, \dots, C_n\} \subset \mathscr{P}\big([\![1,n]\!]\big)$ telle que $C_0 \subsetneq C_1 \subsetneq C_2 \subsetneq \cdots \subsetneq C_n$.
   Combien y a-t-il de chaînes complètes ? Combien y en a-t-il comprenant une partie $X \subset [\![1,n]\!]$ fixée, de cardinal $k$ ?

   (b) En déduire que si $\mathscr{A}$ est une antichaîne : $\sum\limits_{A \in \mathscr{A}} |A|!\big(n - |A|\big)! \leq n!$

   (c) Montrer que le coefficient binomial $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ est maximal pour $k = \lfloor n/2 \rfloor$.

   (d) Conclure.

**Exercice 25.** ♣ – ●●◐ – *Nombres de Catalan*

Soient $(a,b)$ et $(c,d)$ deux points du plan, à coordonnées entières. On suppose $a \leq c$ et $b \leq d$. On appelle chemin vers le nord-est de $(a,b)$ vers $(c,d)$ une liste de points $\big((x_0,y_0),\dots,(x_N,y_N)\big)$ telle que $(a,b) = (x_0,y_0)$, $(c,d) = (x_N,y_N)$ et

$$\forall k \in [\![0, N-1]\!], (x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k + 1) \text{ ou } (x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k + 1, y_k).$$

1. Quelle est la valeur de $N$ dans la définition précédente ? Combien y a-t-il de chemins vers le nord-est de $(a,b)$ vers $(c,d)$ ?

On considère désormais les chemins vers le nord-est de $(0,0)$ vers $(n,n)$ (où $n \in \mathbb{N}$) tels que chaque point $(x_k, y_k)$ du chemin vérifie $y_k \leq x_k$. On note $C_n$ le nombre de tels chemins : c'est le $n$-ème *nombre de Catalan.*

2. Soient $a > b$ deux entiers naturels. Montrer qu'il y a autant de chemins vers le nord-est de $(1,0)$ vers $(a,b)$ touchant la diagonale $(x = y)$ que de chemins vers le nord-est de $(0,1)$ vers $(a,b)$.

3. En déduire que le nombre de chemins vers le nord-est de $(1,0)$ vers $(a,b)$ ne touchant pas la diagonale est $\dfrac{a-b}{a+b}\begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix}$.

4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \dfrac{1}{2n+1}\begin{pmatrix} 2n+1 \\ n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{n+1}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$.

5. Montrer à partir de la définition que $\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

**Exercice 26.** ♣ – ●●◐ – *Régions dans un cercle*

Soit $\mathscr{C}$ un cercle. On place $n$ points distincts sur le cercle et on trace toutes les cordes reliant deux de ces points. On suppose que la situation est générique : trois cordes ne sont jamais concourantes. On cherche à déterminer le nombre $R_n$ de régions délimitées par les cordes.

1. Déterminer $R_n$, pour $n \leq 4$. Quelle conjecture pouvez-vous émettre ?
2. Quel est le nombre $C_n$ de cordes ?
3. Quel est le nombre $I_n$ de points d'intersection (à l'intérieur du cercle) entre cordes ?
4. On admet la formule d'Euler $R_n = 1 + L_n + I_n$. En déduire $R_n$.
5. Que valent $R_5$ et $R_6$ ? Quelle morale en tirer ?

## Indications

**Exercice 2.** Soyez attentif à l'usage de l'article défini.

**Exercice 9.** Fixer un élément. Considérer l'application ajoutant/ôtant cet élément à une partie.

**Exercice 11.** Un $p$-uplet d'entiers naturels de somme $n$ peut être représenté par la succession de $n+p-1$ symboles : $n$ étoiles et $p-1$ barres verticales.

**Exercice 13.** Associer à chaque terme $x_k$ de la suite le couple $(a_k, b_k)$ où $a_k$ (resp. $b_k$) est défini comme la longueur maximale d'une sous-suite croissante (resp. décroissante) terminant en $x_k$. Puis montrer que tous ces couples sont distincts.

**Exercice 15.** Attention à ne pas compter plusieurs fois les mêmes configurations !

**Exercice 19.** Fixer un élément et distinguer selon qu'il est égal ou pas à son image par une involution.

**Exercice 21.** Pour 2., décaler progressivement les images vers la droite.

**Exercice 25.** Pour 2., si un chemin de $(0,0)$ vers $(a,b)$ touche la diagonale, considérer le dernier point d'intersection (avant $(n,n)$) et faire la réflexion du chemin partiel entre $(0,0)$ et ce point d'intersection.
Pour 5., distinguer selon le dernier point d'intersection (avant $(n,n)$) d'un chemin avec la diagonale.