DM 7 - Nombres de Stirling, nombres de Catalan

Exercice 1. – *Nombre de surjections, par la formule du crible*

1. Une application $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,p]\!]$ est dans $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ ssi son image est incluse dans $[\![1,p]\!] - \{i_1,\ldots,i_k\}$. Cet ensemble a $p-k$ éléments.

   Il y a donc $(p-k)^n$ applications dans $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$.

2. Une application $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,p]\!]$ est une surjection ssi tout élément $k \in [\![1,p]\!]$ a un antécédent par f ssi $f \notin A_k$, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$. Donc,

$$\mathscr{S}(n,p) = \bigcap_{k=1}^{p} \overline{A_k} = \overline{\bigcup_{k\in[\![1,p]\!]} A_k},$$

   le complémentaire étant pris dans $\mathscr{F}\big([\![1,n]\!],[\![1,p]\!]\big)$.

3. Par la formule du crible, on a

$$\Big|\bigcup_{k=1}^{p} A_k\Big| = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq p} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

   Le calcul du cardinal des intersections a été fait à la question 1. On a donc :

$$\begin{aligned}\Big|\bigcup_{k=1}^{p} A_k\Big| &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq p} (p-k)^n \\ &= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \binom{p}{k} (p-k)^n.\end{aligned}$$

   Comme $S(n,p) = p^n - \Big|\bigcup_{k=1}^{p} A_k\Big|$, on obtient :

$$S(n,p) = p^n - \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \binom{p}{k} (p-k)^n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{k} \binom{p}{k} (p-k)^n.$$

   D'où $S(n,p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$, en utilisant le changement de variable $k \mapsto p-k$ et la formule de symétrie.

Exercice 2. – *Nombres de Stirling*

1. **Nombres de Stirling de deuxième espèce.**

(a) Les partitions de $\mathscr{P}(n,k)$ sont de deux types, celles pour lesquelles $\{n\}$ constitue une partie de la partition, et celles pour lesquelles ce n'est pas le cas. On note $\mathscr{P}_1(n,k)$ et $\mathscr{P}_2(n,k)$ l'ensemble des partitions du premier et du de deuxième type.

Il y a autant de partitions dans $\mathscr{P}_1(n,k)$ que de partitions dans $\mathscr{P}(n-1,k-1)$: en effet, il suffit d'ajouter/d'enlever la partie $\{n\}$ pour passer d'une partition de $\mathscr{P}_1(n,k)$ à une partition de $\mathscr{P}(n-1,k-1)$. Donc $|\mathscr{P}_1(n,k)| = \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}$.

Les partitions de $\mathscr{P}_2(n,k)$ sont obtenues en ajoutant l'élément n à une partie d'une partition de $\mathscr{P}(n-1,k)$. On a donc $|\mathscr{P}_2(n,k)| = \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} \times k$. *Le premier facteur correspond au choix de la partition ; le deuxième au choix de l'une des k parties à laquelle on ajoute l'élément n.*

Par le principe d'addition, on a finalement

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = k\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}.$$

(b) Notons $\mathscr{P}(n)$: $\forall x \in \mathbb{R}, x^n = \sum_{k=1}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}}$. On montre $\mathscr{P}(n)$, pour $n \geq 1$, par récurrence sur n.

- Initialisation. Soit $x \in \mathbb{R}$. On doit montrer que $x = \begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} x$. Or $\begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} = 1$: il y a une unique façon de partitionner un ensemble en une seule partie.
- Hérédité. Soit $n \geq 2$ tel que $\mathscr{P}(n-1)$ est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$\begin{aligned}
x^{n+1} &= x^n \times x \\
&= \sum_{k=1}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}} \times (x-k+k) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} \begin{Bmatrix} n \\ k-1 \end{Bmatrix} x^{\underline{k}} + \sum_{k=1}^{n} k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \left(\begin{Bmatrix} n \\ k-1 \end{Bmatrix} + k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \right) x^{\underline{k}} + \begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix} x^{\underline{n+1}} + 1 \begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} x^{\underline{1}} \\
x^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \begin{Bmatrix} n+1 \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}}.
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé la formule de récurrence montrée à la question précédente ; ainsi que $\begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} = 1$ (il y a une unique partition de $[\![1,n]\!]$ en une seule/en n partie(s)) et aussi $x^{\underline{1}} = x$.

(c) Soit $y \in [\![1,k]\!]$. Par définition de $\mathscr{R}_f$, les ensembles de la forme $f^{-1}(y)$ sont des classes d'équivalence pour $\mathscr{R}_f$, si on a $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Comme f est surjective, cette condition est toujours satisfaite.

On a donc $P_f = \{f^{-1}(1), \dots, f^{-1}(k)\}$. C'est bien une partition de $[\![1, n]\!]$, composée de k parties.

Donc $P_f \in \mathscr{P}(n, k)$.

(d) Soit $P \in \mathscr{P}(n, k)$. Notons $P = \{P_1, \dots, P_k\}$. Si $f \in \mathscr{S}(n, k)$, on a $P = P_f$ ssi $\{P_1, \dots, P_k\} = \{f^{-1}(1), \dots, f^{-1}(k)\}$. Ces deux ensembles sont de cardinal k ; l'égalité a donc lieu ssi on peut renuméroter les P_j pour que l'égalité ait lieu terme à terme, c'est-à-dire ssi il existe une permutation σ de $[\![1, k]\!]$ telle que

$$\forall j \in [\![1, k]\!], P_{\sigma(j)} = f^{-1}(j).$$

f est entièrement déterminée par ces égalités : une fois choisie σ, f est l'application définie par

$$\forall x \in [\![1, n]\!], f(x) = j \iff x \in P_{\sigma(j)}.$$

Ainsi, P a autant d'antécédents par Φ qu'il y a de permutations de $[\![1, k]\!]$. Donc, P a $k!$ antécédents. En particulier, Φ est surjective.

(e) On applique le principe de division : $|\mathscr{P}(n, k)| = \dfrac{1}{k!}|\mathscr{S}(n, k)|$. Donc,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} S(n, k).$$

(f) Si $x = p$ est un entier naturel, on a $p^{\underline{k}} = \dfrac{p!}{(p-k)!}$ si $k \leq p$ et 0 sinon. La formule appliquée à p donne donc :

$$p^n = \sum_{k=1}^{\min(n,p)} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{p!}{(p-k)!}.$$

Or $\dfrac{p!}{(p-k)!} = k! \dbinom{p}{k}$ et $k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = S(n, k)$. Donc,

$$p^n = \sum_{k=1}^{\min(n,p)} \binom{p}{k} S(n, k).$$

Le membre de gauche est le nombre d'applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$. Chaque terme du membre de droite correspond au nombre de ces applications dont l'image est de cardinal k (*On choisit les k images parmi les p possibles, puis une surjection de $[\![1, n]\!]$ vers ces k images.*)

2. (a) Il y a $k!$ k-uplets $(y_1, \dots, y_k)$ tels que $\{y_1, \dots, y_k\} = \{x_1, \dots, x_k\}$. Chacun de ces k-uplets est en relation avec k k-uplets (lui-même inclus).

Il y a donc $\dfrac{k!}{k} = (k-1)!$ cycles de support $\{x_1, \dots, x_k\}$.

(b) Chacune des parties P_i est le support de $(n_i - 1)!$ cycles. Il y a donc $\displaystyle\prod_{i=1}^{k} (n_i - 1)!$ partitions en cycles, de support $\mathscr{P}$.

(c) cf. document sur cahier-de-prepa

(d) D'après la question précédente (b), l'application Ψ est surjective. On a donc $|\mathscr{C}(n,k)| \geq |\mathscr{P}(n,k)|$, c'est-à-dire $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \geq \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$. Pour qu'il y ait égalité, il faut et il suffit que chaque partition $\mathscr{P}$ ait un unique antécédent. Avec les notations de la question b), cela revient à demander que pour chaque partition $\mathscr{P}$:

$$\prod_{i=1}^{k} (n_i - 1)! = 1.$$

Cela est équivalent à $n_i = 1$ ou $n_i = 2$, pour tout i. Ainsi, il y a égalité ssi toutes les partitions dans $\mathscr{P}(n,k)$ ont des parties de cardinal 1 ou 2. Ceci est finalement équivalent à $k \geq n-1$.

(e) Les partitions en cycles de $\mathscr{P}(n,k)$ sont de deux types : celles pour lesquelles n est isolé et celles pour lesquelles il ne l'est pas. Il y en a autant du premier type que de partitions en cycles dans $\mathscr{P}(n-1,k-1)$. Pour celles du deuxième type, on se convainc que toutes ces partitions sont obtenues de façon unique en partant d'une partition de $\mathscr{P}(n-1,k)$ et en insérant l'élément n dans un cycle. Il y a $n-1$ choix pour l'insertion (on décide de l'élément qui aura n pour successeur).

Par principes de multiplication et d'addition, on trouve la formule annoncée.

(f) On remarque que $1^{\overline{n}} = n!$. On a donc

$$n! = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

(g) Soit x un réel. On a

$$(-x)^{\overline{n}} = (-x)(-x+1)\ldots(-x+n-1) = (-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1) = (-1)^n x^{\underline{n}}.$$

On applique la formule précédente en substituant $-x$ à x :

$$(-x)^{\overline{n}} = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-x)^k.$$

D'où, avec le calcul préliminaire :

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k.$$

(h) On a montré en 1.e) que pour tout réel x et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}}.$$

Avec la formule précédente, on en déduit :

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \sum_{m=1}^{k} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{k-m} x^m.$$

D'où, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$x^n = \sum_{m=1}^{n} \Big(\sum_{k=m}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{k-m} \Big) x^m.$$

C'est une égalité entre deux polynômes. Par principe d'identication des coefficients, on a donc :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=m}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{k-m} = \delta_{m,n}.$$

Exercice 3. – *Nombres de Catalan*

1. (a) On passe d'un point (x_k, y_k) au point (x_{k+1}, y_{k+1}) en faisant un pas vers le haut ou vers la droite. Comme il faut faire un total de $(c-a)+(d-b)$ pas pour relier (a,b) à (c,d), N vaut $(c-a)+(d-b)$.
La donnée d'un tel chemin vers le nord-est est équivalente au choix des $c-a$ pas vers la droite, parmi les N pas ; il y a donc $\binom{N}{c-a}$ tels chemins.

   (b) Remarquons déjà qu'un chemin vers le nord-est reliant $(0,1)$ à (a,b) doit traverser la diagonale. En effet, en notant (x_k, y_k) les points d'un tel chemin, la quantité $y_k - x_k$ vaut 1 pour $k=0$, est strictement négative pour $k=N$ et elle évolue de 1 en 1, donc elle s'annule un moment.
Considérons un chemin de longueur N vers le nord-est de $(1,0)$ vers (a,b) touchant la diagonale pour la première fois en le point (x_{k_0}, y_{k_0}). On lui associe un chemin de longueur N vers le nord-est de $(0,1)$ vers (a,b) ainsi : ce chemin est formé ainsi : pour $k \le k_0$, $(x'_k, y'_k) = (y_k, x_k)$ et pour tout $k \ge k_0$, $(x'_k, y'_k) = (x_k, y_k)$.
Ceci définit une bijection entre les deux types de chemin (la bijection réciproque est construite de la même façon, en utilisant la remarque préliminaire).
On a donc fait une réflexion sur les chemins, sur la partie allant jusqu'à la première intersection avec la diagonale.

   (c) Notons M le nombre de chemins vers le nord-est de $(1,0)$ vers (a,b) ne touchant pas la diagonale, M_1 le nombre de chemin total de $(1,0)$ vers (a,b) et M_2 le nombre de ceux touchant la diagonale.
On a donc $M = M_1 - M_2$. On connait M_1 par la question 1 : c'est $\binom{a+b-1}{a-1}$. De plus, M_2 est égal au nombre de chemins de $(0,1)$ vers (a,b) d'après la question précédente ; c'est donc $\binom{a+b-1}{a}$, toujours par la question 1. Donc,

$$M = \binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{a} = \binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{b-1} = \frac{a}{a+b}\binom{a+b}{a} - \frac{b}{a+b}\binom{a+b}{a} = \frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a}.$$

On a utilisé la formule de symétrie et la formule du chef.

   (d) On constate aisément que les chemins sous la diagonale de $(0,0)$ vers (n,n) sont exactement ceux obtenus en translatant de 1 vers la gauche les chemins de $(1,0)$ vers $(n+1,n)$ ne touchant pas la diagonale. Le nombre C_n de tels chemins est donc, d'après la question précédente :

$$C_n = \frac{n+1-n}{n+1+n}\binom{n+1+n}{n} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

par la formule du chef.

(e) Notons $\mathscr{C}$ l'ensemble des chemins vers le nord-est de $(0,0)$ à $(n+1,n+1)$ restant sous la diagonale, de sorte que $C_{n+1} = |\mathscr{C}|$. Pour k allant de 0 à n, on note $\mathscr{C}_k$ la partie formée des chemins touchant la diagonale pour la dernière fois (avant $(n+1,n+1)$) en (k,k). Pour construire un tel chemin, on construit d'abord la partie du chemin entre $(0,0)$ et (k,k) : cette partie devant rester sous la diagonale, il y a C_k possibilités. La partie entre (k,k) et $(n+1,n+1)$ commence nécessairement par un pas vers la droite et finit par un pas vers le haut ; on doit donc relier les points $(k+1,k)$ et $(n+1,n)$, sans jamais toucher la diagonale (car on veut que le chemin construit n'ait pas de point d'intersection avec la diagonale entre (k,k) et $(n+1,n+1)$). En translatant de $k+1$ vers la gauche et de k vers le bas, cela revient à construire un chemin *sous la diagonale* de $(0,0)$ à $(n-k,n-k)$, il y a C_{n-k} chemins. Ainsi, $|\mathscr{C}_k| = C_k C_{n-k}$.
Comme $\mathscr{C}$ est l'union disjointe, pour $k \in [\![0,n]\!]$ des $\mathscr{C}_k$, on obtient par principe d'addition que $C_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

2. (a) La fonction $x \mapsto x^n\sqrt{4-x^2}$ est impaire si n l'est. Comme on intègre cette fonction sur $[-2,2]$, symétrique par rapport à 0, on a $m_n = 0$ si n est impair.

(b) On pose $u = \arccos(x/2)$, bien défini car $x/2 \in [-1,1]$. Si $x \in [-2,2]$, $x = 2\cos u$. Et $dx = -2\sin u\, du$. Donc, par changement de variable :

$$m_0 = \frac{1}{2\pi}\int_\pi^0 \sqrt{4-4\cos^2 u} \times (-2\sin u)\, du = \frac{1}{2\pi}4\int_0^\pi \sin^2 u\, du = \frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{2} = 1.$$

On linéarise pour le calcul final.

(c) On procède par intégration par parties. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pair.

$$m_{n+2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} x^{n+1}\times x\sqrt{4-x^2}dx = \frac{1}{2\pi}\Big[x^{n+1}(4-x^2)^{3/2}\times(-1/3)\Big]_{-2}^{2} + \frac{1}{3\times 2\pi}\int_{-2}^{2}(n+1)x^n(4-x^2)^{3/2}\,dx.$$

Le crochet est nul. L'intégrale de droite vaut $\frac{n+1}{3}\big(4m_n - m_{n+2}\big)$. On a donc :

$$m_{n+2} = \frac{n+1}{3}\big(4m_n - m_{n+2}\big).$$

Ce qui donne : $(n+4)m_{n+2} = 4(n+1)m_n$. Et donc, $m_{n+2} = \dfrac{4(n+1)}{n+4}m_n$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule trouvée en 1.*d*), on a :

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{n+1}{n+2}\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)\binom{2n+1}{n}}{(n+2)\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+2)(n+1)} = \frac{2(2n+1)}{n+2} = \frac{m_{2n+2}}{m_{2n}}.$$

Comme $m_0 = C_0 = 1$, un produit téléscopique (ou une récurrence) donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, m_{2n} = C_n.$$

3. (a) Soit $n \geq 1$. On reprend le calcul de la question précédente :

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{2(2n-1)}{n+1}.$$

Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{n-1}{n}\right)^{3/2} \leq \frac{C_n}{C_{n-1}} &\iff 16\left(\frac{n-1}{n}\right)^3 \leq \frac{4(2n-1)^2}{(n+1)^2} \\ &\iff 4(n-1)^3(n+1)^2 \leq n^3(2n-1)^2 \\ &\iff 4(n^3-3n^2+3n-1)(n^2+2n+1) \leq n^3(4n^2-4n+1). \end{aligned}$$

Le membre de gauche est

$$4(n^5-n^4-2n^3+2n^2+n-1)$$

Celui de droite est $4n^5-4n^4+n^3$. Il s'agit donc de montrer que

$$-9n^3+8n^2+4n-4 \leq 0.$$

Or, comme $n \geq 1$, $n^3 \geq n^2$. Donc, $-9n^3 \leq -9n^2$. Et donc,

$$-9n^3+8n^2+4n-4 \leq -n^2+4n-4 = -(n-1)^2.$$

Ceci montre la première inégalité.
L'autre s'obtient de même. *Bluff du prof*

(b) Soit $n \geq 1$. Un produit téléscopique des inégalités précédentes donne (on renomme n en k et on prend k de 2 à n) :

$$4^{n-1}\frac{1}{n^{3/2}} \leq \frac{C_n}{C_1} \leq 4^{n-1}\frac{2^{3/2}}{(n+1)^{3/2}}.$$

Or $C_1 = 1$, $2^{3/2} = \sqrt{8} \leq 3$ et $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$. D'où :

$$\frac{4^{n-1}}{n^{3/2}} \leq C_n \leq 4^{n-1}\frac{3}{n^{3/2}}.$$

Avec la définition de u_n, on obtient l'encadrement demandé.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par (1.d), on a

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)(n!)^2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$. On a donc :

$$C_n = \frac{1}{n+1}\frac{u_{2n}\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{u_n^2(2\pi n)\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{u_{2n}}{(n+1)u_n^2}\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Donc, $\frac{C_n}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{u_{2n}}{u_n^2}\frac{n}{n+1}$. Comme d'après la formule de Stirling, $u_n \to 1$, ceci a bien pour limite $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

(a) Voir par exemple
`http://villemin.gerard.free.fr/aNombre/TYPDENOM/Catalan/CataPoly.htm`

(b) Pour tout n, on note D_n le nombre de tels découpages. Fixons un polygone convexe à $n+1$ sommets. Numérotons dans un ordre fixé ses sommets de 0 à n et considérons le côté a reliant 0 à 1.
Déterminer un découpage du polygone revient à faire les deux choses suivantes :

- Choisir un sommet entre 2 et n et relier 0 et 1 à ce sommet : on a choisi le triangle auquel le côté a appartient.
- Choisir un découpage des deux polygones obtenus.

Si on a choisi le sommet k, une petite réflexion montre que les deux polygones obtenus ont k et $n-k+2$ sommets. D'où la formule de récurrence suivante :

$$\forall n \geq 2, D_{n+1} = \sum_{k=2}^{n} D_k D_{n-k+2}.$$

Si on introduit $\widetilde{C_n} = D_{n+2}$, pour $n \geq 1$, on a donc :

$$\widetilde{C}_{n+1} = D_{n+3} = \sum_{k=2}^{n+2} D_k D_{n+4-k} = \sum_{k=2}^{n+2} \widetilde{C}_{k-2}\widetilde{C}_{n+2-k} = \sum_{i=0}^{n} \widetilde{C}_i \widetilde{C}_{n-i}.$$

On retrouve la formule de récurrence des nombres de Catalan (et la bonne initialisation). Donc,

$$\forall n \geq 3, D_n = C_{n-2}.$$

Ceci est équivalent à la formule trouvée par Euler, en développant le coefficient binomial. En effet,

$$\begin{aligned}
C_{n-2} &= \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2} \\
&= \frac{(2n-4)!}{(n-2)!(n-1)!} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n-2}(2k-1)(2k)}{(n-2)!(n-1)!} \\
C_{n-2} &= \frac{\prod_{k=1}^{n-2}(4k-2)}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$