

DM 7 - Nombres de Stirling, nombres de Catalan

Exercice 1. – Nombre de surjections, par la formule du crible

1. Quelques confusions. Il est mieux de dire que y n'a pas d'antécédent par f plutôt que de dire que f n'a pas d'antécédent pour y .
Plus important, pour parler de l'ensemble des valeurs potentielles par une fonction dans $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$, beaucoup écrivent $\llbracket 1, p - k \rrbracket$, au lieu de $\llbracket 1, p \rrbracket \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ (les deux ensembles ont même cardinal mais ne sont pas les mêmes).
2. Souvent, une justification consiste en une phrase vague dont la formulation correspond à une inclusion, et non à une égalité. Le plus simple est de dire qu'une fonction est une surjection ssi elle n'est dans aucun A_k .
3. Calculs parfois douteux, notamment dans la gestion des indices.

Exercice 2. – Nombres de Stirling

On garde les notations de l'exercice précédent.

1. Nombres de Stirling de deuxième espèce. P

- (a) Des explications plus ou moins convaincantes. Il n'y a pas besoin d'écrire un roman mais il faut dire clairement ce que l'on compte. Il est aussi plus agréable de partir des partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et de les distinguer clairement selon un critère (expliquant l'addition) : en l'occurrence, savoir si l'élément n (ou un autre, mais à fixer) est seul ou non dans sa partie.
- (b) On n'oubliera pas de déclarer les variables, même quand il n'y a pas d'ambiguïté. Le plus simple est de déclarer x *avant* la récurrence.
- (c) Souvent une confusion entre une partition de E , qui est un *ensemble* dont les éléments sont des parties de E et l'union de ces parties (qui est E lui-même).
Dans un cas, on considère l'ensemble des boîtes, dans l'autre l'ensemble des contenus mis en commun.
- (d) Souvent confus.
- (e) RAS
- (f) Peu ont donné une interprétation combinatoire suffisante. Il fallait comprendre que donner une fonction revient à donner, dans l'ordre : le cardinal de son image, les éléments de son image et une surjection à valeur dans son image.

Exercice 3. – Nombres de Catalan

1. Chemins vers le nord-est.

- (a) RAS

- (b) On n'attend pas un raisonnement trop formalisé. Cependant, parler de symétrie seulement ne suffit pas ; à votre lecture, on doit se représenter clairement quel chemin d'un côté est mis en relation avec quel chemin de l'autre.
- (c) RAS
- (d) Le décalage de la situation par translation est souvent mal exprimé.
- (e) Peu de réponses convaincantes. D'abord, il faut comprendre comment partitionner les chemins vers $(n+1, n+1)$ avec cet entier k : k peut par exemple correspondre au dernier point d'intersection avec la diagonale avant $(n+1, n+1)$; si on ne met pas *dernier*, on va mal compter les choses puisqu'il y aura des doublons.
Ensuite, il faut comprendre ce que représente le terme $C_k \times C_{n-k}$. Le premier facteur ne pose pas problème ; il fallait dire que C_{n-k} est *aussi* le nombre de chemins de (k, k) vers $(n+1, n+1)$ qui ne touchent pas ailleurs la diagonale (ce qui explique le décalage d'indices).

2. Un calcul d'intégrales¹

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $m_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^n \sqrt{4-x^2} dx$.

- (a) RAS
- (b) Attention à ces petits calculs ; ne pas oublier notamment la constante de normalisation.
- (c) Plutôt OK. On conseille cependant de bien s'entraîner à faire ce genre de calculs efficacement (ne pas y penser trop de temps, ni trop de lignes).
- (d) Avec un produit télescopique, c'est parfait. Dans la moitié des copies, on ne fait pas le lien avec les nombres de Catalan, ce qui est un peu dommage : demandez-vous ce que cette partie vient faire là (*Dans le sujet de Centrale, le lien était explicitement donné.*)

3. Asymptotique des nombres de Catalan.

- (a) Question un peu pénible. On peut sans doute s'en sortir avec une étude de fonction mais c'est une artillerie lourde pour finalement étudier un polynôme. En tout cas, si on le fait ainsi, les calculs doivent apparaître clairement (on ne vous fera pas confiance).
- (b) De nouveau, un produit télescopique. Il faut prendre l'habitude de ces produits, qui accélèrent considérablement les calculs (et éliminent beaucoup d'erreurs).
- (c) Attention ! D'une part, on écrit pas $\lim \dots$ tant qu'on n'a pas prouvé que la limite existe. D'autre part, on n'écrit jamais $\lim u_n = v_n$: par définition, une limite est un nombre et ne peut pas dépendre de n ; *On aura bientôt des moyens de comparer deux suites entre elles ; mais pas pour le moment, et pas comme ça.*

- 4. (a) RAS
- (b) L'établissement de la formule de récurrence est un peu délicat. Il est plus agréable de fixer une arête et de distinguer selon le triangle auquel elle appartient dans la triangulation.

¹D'après Centrale 1 MP 2021.