Matrices 2×2

On donne une condition d'inversibilité et une formule pour l'inverse dans le cas des matrices de taille 2.

Définition 0.1
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On définit son déterminant $\det M$ par

$$\det M = ad - bc.$$

Théorème 0.2
La matrice M est inversible ssi $\det M \neq 0$. *Dans ce cas, son inverse est*

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Notons $C = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Un calcul immédiat montre que

$$MC = CM = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (\det M) I_n.$$

- Si $\det M \neq 0$, on en déduit en divisant par $\det M$ que M est inversible et que $\frac{1}{\det M}$ est son inverse.
- Si $\det M = 0$, M ne peut pas être inversible. En effet, si elle l'était, on obtiendrait $C = 0$ en multipliant par M^{-1} dans la relation $MC = 0$. Or, si $C = 0$, les coefficients a, b, c, d sont nuls, donc $M = 0$ aussi ; c'est absurde, la matrice nulle n'est pas inversible.

$\square$