11 - Matrices et systèmes linéaires

Jeremy Daniel

> La Matrice est universelle. Elle est omniprésente. Elle est avec nous ici, en ce moment même.
>
> *Matrix*

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque.

1 Calcul matriciel

1.1 Présentation de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 1.1 (Matrice de taille $n \times p$)
Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Une *matrice* de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.

Remarque 1.2
Une matrice A de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ s'écrit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$.
On y pense comme un tableau de nombres et on écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Le premier indice est donc le numéro de la ligne, le deuxième celui de la colonne.

Notation 1.3
On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si $n = p$, on abrège $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on parle de *matrices carrées de taille n*.

Définition 1.4 (Loi + sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)
Si A et B sont des matrices de même taille $n \times p$, on définit la somme $A + B$ en effectuant la somme coefficients par coefficients :

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Remarque 1.5
Muni de cette loi, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un groupe abélien, isomorphe à $\mathbb{K}^{np}$. L'élément neutre est la matrice nulle, dont tous les coefficients sont nuls. On la note en général simplement 0.

Définition 1.6 (Multiplication externe)
Si A est une matrice et si $\lambda \in \mathbb{K}$, on note λA la matrice obtenue en multipliant chaque coefficient par λ :

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

Définition 1.7 (Symbole de Kronecker)
Si i, j sont deux entiers naturels, on note

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 1.8 (Matrices élémentaires)
Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et $l \in [\![1, p]\!]$. On note $E_{k,l}$ la matrice de taille $n \times p$, définie par

$$(E_{k,l})_{i,j} = \delta_{i,k}\delta_{j,l}.$$

Remarque 1.9
C'est donc la matrice de taille $n \times p$, avec un 1 en position (k, l) et des 0 partout ailleurs. Comme les entiers n, p ne figurent pas dans la notation $E_{k,l}$, on précisera toujours la taille de la maatrice élémentaire si elle n'est pas claire dans le contexte.

Proposition 1.10
Soit A une matrice de taille $n \times p$. Alors,

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} E_{i,j},$$

où les $E_{i,j}$ sont les matrices élémentaires de taille $n \times p$.

1.2 Produit matriciel

Définition 1.11 (Produit matriciel)
Soient n, p et q trois entiers naturels non nuls.

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B = (b_{j,k}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Le produit $AB = (c_{i,k})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq q}}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall k \in [\![1, q]\!], c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k}.$$

Remarque 1.12
On retiendra que le coefficient de coordonnées (i, k) du produit AB s'obtient en prenant la i-ème ligne de A et la k-ème colonne de B et en faisant la somme des produits des coefficients dans cette ligne et cette colonne.

Attention !
Plusieurs mises en garde s'imposent :
- Faire le produit AB de deux matrices n'a de sens que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.
- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, les produits AB et BA ont un sens mais ils ne vivent pas dans le même espace. En effet, $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $BA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
- Même quand A et B sont deux matrices carrées de même taille n, on n'a pas en général $AB = BA$.

Exercice 1.13
On considère les trois matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Quels sont les produits bien définis entre ces matrices et que valent-ils ?

Lemme 1.14 (Produit de matrices élémentaires)
Soient n, p et q dans $\mathbb{N}^*$. Soient $i \in [\![1, n]\!]$, $j, k \in [\![1, p]\!]$ et $l \in [\![1, q]\!]$. On considère $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{k,l} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors, dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$:

$$E_{i,j} E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$$

Proposition 1.15 (Associativité du produit)
Soient n, p, q et r des entiers naturels non nuls. On considère $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. On a l'égalité $(AB)C = A(BC)$.

Proposition 1.16 (Distributivité)
Soient $n, p, q, r \in \mathbb{N}^*$. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Alors,

$$A(B + C) = AB + AC \text{ et } (B + C)D = BD + CD.$$

1.3 Transposition

DÉFINITION 1.17 (Transposée d'une matrice)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La transposée de A, notée A^T est la matrice $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par

$$A^T = (a_{i,j})_{\substack{1\leq j\leq p \\ 1\leq i\leq n}}.$$

PROPOSITION 1.18 (Transposée d'une combinaison linéaire)
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors, dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$,

$$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T.$$

En particulier, l'application $A \mapsto A^T$ est un isomorphisme de groupes de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 1.19 (Transposée d'un produit)
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors, dans $\mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$,

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

DÉFINITION 1.20 (Matrices symétriques, anti-symétriques)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est symétrique si $A = A^T$, anti-symétrique si $A = -A^T$.

NOTATION 1.21
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques/anti-symétriques de taille n.

PROPOSITION 1.22
Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire d'une unique façon comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

2 Systèmes linéaires

2.1 Généralités

DÉFINITION 2.1 (Équation linéaire à p inconnues)
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une équation linéaire à p inconnues $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{K}$ est une équation de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$, où $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{K}$.

DÉFINITION 2.2 (Systèmes linéaires de n équations à p inconnues)
Un système linéaire de n équations à p inconnues $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{K}$ est la donnée de n équations linéaires à p inconnues $x_1, \ldots, x_p$

Remarque 2.3
On l'écrit sous la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Définition 2.4 (coefficients, second membre)
Les $a_{i,j}$ sont les coefficients du système. Les b_i constituent le second membre de l'équation.

Définition 2.5 (Système linéaire homogène)
Un système linéaire est homogène si le second membre est nul. Étant donné un système linéaire quelconque, son système linéaire homogène associé est le système obtenu en gardant les mêmes coefficients mais en annulant le second membre.

Définition 2.6 (Système compatible)
Un système est compatible s'il admet au moins une solution. Il est incompatible sinon.

Remarque 2.7
Tout système homogène est compatible : une solution est obtenue en prenant tous les x_j nuls.

Théorème 2.8 (Structure des solutions)
On considère un système linéaire à n équations et p inconnues. Notons S l'ensemble de ses solutions et S_H l'ensemble des solutions du système homogène associé. Alors,

- *$\vec{0} = (0, \ldots, 0) \in S_H$. Si $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_p)$ et $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_p)$ sont dans S_H et si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = (\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_p + \mu y_p) \in S_H$.*
- *Si $\vec{x}$ est une solution quelconque de S, alors*

$$S = \vec{x} + S_H = \{\vec{x} + \vec{y}, \vec{y} \in S_H\}.$$

2.2 Aspects matriciels

Proposition 2.9 (Système linéaire, équation matricielle)
On considère un système linéaire

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p & = b_n \end{cases}$$

On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ la matrice des coefficients et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne associée au second membre. Si $x = (x_1, \ldots, x_p)$ est un élément de $\mathbb{K}^p$, on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ sa matrice colonne associée.
Alors, x est solution du système linéaire ssi l'équation matricielle $AX = B$ est satisfaite.

Remarque 2.10
En pratique, on ne distinguera pas les deux modes d'écriture et on dira que l'équation $AX = B$ est un système linéaire.

Définition 2.11 (Matrices d'opérations élémentaires)
On fixe n un entier naturel non nul. Soient $i \neq j \in [\![1, n]\!]$, soit $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$. On considère les matrices suivantes, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
- $P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$
- $M_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$
- $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$

On les appelle les matrices d'opérations élémentaires.

Exemple 2.12
Pour $n = 2$, on a :

$$P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; M_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; T_{2,1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.13
Les notations ne sont pas standard. P est pour permutation ; M pour multiplication et T pour transvection.

Proposition 2.14 (Opérations élémentaires sur les lignes)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Multiplier A à gauche par une matrice d'opération élémentaire donne une matrice $\tilde{A}$, obtenue en agissant sur les lignes de A. Plus précisément :
- *$P_{i,j}A$ est la matrice obtenue en échangeant les lignes i et j de A ;*
- *$M_i(\lambda)A$ est la matrice obtenue en multipliant la ligne i de A par λ ;*
- *$T_{i,j}(\lambda)A$ est la matrice obtenue en ajoutant à la ligne i de A, λ fois la ligne j de A.*

Remarque 2.15
On peut aussi agir sur les colonnes de A en multipliant à droite. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
- $AP_{i,j}$ est la matrice obtenue en échangeant les colonnes C_i et C_j de A ;
- $AM_i(\lambda)$ est la matrice obtenue en multipliant la i-ème colonne de A par λ ;

– $AT_{i,j}(\lambda)$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la i-ème colonne de A, à la j-ème colonne de A.

Proposition 2.16 (Inversibilité des matrices d'opérations élémentaires)
Les matrices d'opérations élémentaires sont inversibles (pour la loi $\times$).

Corollaire 2.17
Soit $AX = B$ un système linéaire de taille $n \times p$. Soit P une matrice d'opération élémentaire, de taille n. Alors,

$$AX = B \iff (PA)X = PB.$$

Remarque 2.18
Ceci est une traduction matricielle du fait que les solutions d'un système linéaire sont inchangées quand on effectue une opération élémentaire du type précédent sur les lignes du système.

2.3 Algorithme du pivot de Gauss

Définition 2.19 (Matrice échelonnée en lignes)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $L_1, \ldots, L_n$ ses lignes. On dit que A est échelonnée en lignes si elle vérifie les conditions suivantes :

– Si une ligne L_i est nulle, les lignes L_j pour $j \geq i$ sont nulles ;
– Si une ligne L_i est non nulle et si son premier coefficient non nul est en position k, alors : ou bien L_{i+1} est nulle, ou bien son premier coefficient non nul est en position ℓ, avec $\ell > k$.

Remarque 2.20
Visuellement, en parcourant les lignes de la matrice de haut en bas, le nombre de zéros en début de ligne croît strictement jusqu'à ce que la ligne entière soit nulle.

Définition 2.21 (Pivot dans une ligne non nulle)
Si une matrice A est échelonnée en ligne et que sa ligne L_i est non nulle, on appelle *pivot* de la ligne L_i son premier coefficient non nul.

Exemple 2.22
La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée en lignes. Les pivots sont 1, 5 et 7.

Méthode 2.23 (Algorithme du pivot de Gauss)
L'objectif est de transformer un système linéaire en un système échelonné équivalent, qu'on peut alors résoudre. On part d'un système linéaire $(\mathcal{S})$ à n lignes et p inconnues $x_1, \ldots, x_p$:

- Si la première inconnue x_1 n'apparait pas dans le système, on passe à l'étape suivante.
- Si x_1 apparait sur une ligne, on peut le faire apparaître sur la première ligne, quitte à faire un échange de deux lignes.
- Si x_1 apparait sur la première ligne, on peut ajouter à chacune des autres lignes L_i, $i \geq 2$, un multiple de la ligne L_1, afin de faire disparaître x_1 des lignes L_i, pour $i \geq 2$.

Après cette première étape, l'inconnue x_1 apparait dans le système seulement sur la première ligne (ou pas du tout). On recommence cette procédure avec le sous-système de $n-1$ équations (lignes $L_2, \ldots, L_n$) et $p-1$ inconnues $x_2, \ldots, x_p$. Ainsi de suite... jusqu'à obtenir un système échelonné. Comme chaque opération élémentaire transforme un système en système équivalent, le système échelonné est équivalent au système initial.

Remarques 2.24

- L'opération élémentaire de multiplication n'est pas nécessaire pour cet algorithme. Cependant, elle permet parfois de limiter les erreurs de calcul (notamment pour manipuler des coefficients entiers plutôt que des fractions).
- De même, pour limiter les erreurs, on peut avoir intérêt à faire une permutation de deux lignes pour avoir le coefficient le plus simple possible devant la variable qu'on va éliminer des autres lignes (le mieux, c'est d'avoir 1 ou -1 devant cette variable).

Théorème 2.25 (Pivot de Gauss - Toute matrice est échelonnable en lignes)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il existe $A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ échelonnée en lignes, telle que A' s'obtienne à partir de A par des opérations élémentaires successives sur les lignes.

Remarque 2.26
La résolution d'un système linéaire échelonné se fait *de proche en proche* à partir du bas. Les variables correspondant à des colonnes sans pivot sont libres : elles peuvent prendre une valeur quelconque ; les autres variables sont exprimées en fonction des variables libres.

Exercice 2.27
Résoudre, pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & - & 2z & + & t & = 3 \\ 2x & + & 2y & + & z & & & = 2 \\ x & + & 2y & & & - & t & = 1 \\ & - & y & - & 2z & + & 3t & = 4 \end{array}\right.$$

Exercice 2.28
On considère $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. Résoudre le système

$$(\mathcal{S}_m) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & - & y & + & z & + & t & = 1 \\ x & + & 2y & - & z & + & 4t & = 2 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & 11t & = m \end{array}\right.$$

3 L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

3.1 Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

Théorème 3.1 ($\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un anneau)
Muni des lois + et $\times$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un anneau.

Remarque 3.2
Cet anneau est non commutatif si $n \geq 2$. De plus, il ne satisfait pas la règle du produit nul et possède des éléments nilpotents (élément non nul dont une puissance est nulle).

Exercice 3.3
Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, exhiber une matrice A non nulle telle que A^2 est nulle. Exhiber aussi deux matrices B et C telles que BC est nulle mais pas CB.

Remarque 3.4
On peut donc appliquer dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toutes les règles de calcul valables dans un anneau quelconque. En particulier, la formule du binôme de Newton est valable pour calculer une puissance de la somme de deux matrices A et B telles que $AB = BA$.

Définition 3.5 (Matrice I_n)
L'élément neutre pour $\times$ est la matrice identité I_n, avec des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs.

Définition 3.6 ($\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$)
On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 3.7 (Inverse et transposée)
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi sa transposée A^T l'est. Dans ce cas,

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Théorème 3.8 (Systèmes de Cramer)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) A est inversible ;
ii) Le système linéaire homogène $AX = 0$ admet comme unique solution $X = 0$;
iii) Pour tout second membre $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = B$ admet une unique solution.
iv) Il existe un second membre $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que l'équation $AX = B$ admet une unique solution.

Méthode 3.9 (Calcul de l'inverse d'une matrice - version système linéaire)
On cherche à déterminer si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et, le cas échéant, calculer son inverse. On considère un second membre B quelconque et on résout le système $AX = B$. Quand A

a été échelonnée en lignes, elle est inversible ssi il n'y a pas de lignes nulles. Dans ce cas, on continue la résolution ; formellement on peut réécrire la présentation des solutions sous la forme

$$\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = B \iff X = A^{-1}B.$$

Ainsi, A^{-1} est la matrice des coefficients, permettant d'exprimer la solution X en fonction du second membre B.

Méthode 3.10 (Calcul de l'inverse d'une matrice - version matricielle)
C'est une reformulation purement matricielle de la méthode précédente. On dispose côte à côte la matrice A et la matrice I_n. On applique les mêmes opérations sur les lignes de A et de I_n jusqu'à échelonnement. Puis on continue les opérations sur les lignes, jusqu'à transformer A en la matrice I_n (sorte de deuxième pivot de Gauss, à l'envers). Quand A a été transformée en I_n, I_n a été transformée en A^{-1}.

3.2 Matrices triangulaires et diagonales

Définition 3.11 (Matrices diagonales)
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonale si ses coefficients hors de la diagonale sont nuls :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j \implies a_{i,j} = 0.$$

Notation 3.12
On pourra noter $D = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$ la matrice diagonale dont le coefficient d'indices (i, i) est d_i.

Définition 3.13 (Matrices scalaires)
Une matrice scalaire est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont identiques.

Remarque 3.14
Une telle matrice s'écrit donc λI_n, pour un $\lambda \in \mathbb{K}$. La multiplication par λI_n revient à faire une multiplication par λ :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), (\lambda I_n)A = A(\lambda I_n) = \lambda A.$$

Définition 3.15 (Matrices triangulaires supérieures)
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure si ses coefficients strictement sous diagonale sont nuls :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], i > j \implies a_{i,j} = 0.$$

Remarque 3.16
Elle est triangulaire supérieure stricte si de plus les coefficients diagonaux sont nuls.

Remarque 3.17
On peut de même définir les matrices triangulaires inférieures (strictes).

Notation 3.18
On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales et triangulaires supérieures de taille n.

Proposition 3.19 ($\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-anneaux)
$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-anneaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 3.20 (Les matrices triangulaires supérieures strictes sont nilpotentes)
Soit T une matrice triangulaire supérieure stricte. Alors $T^n = 0$.

Proposition 3.21 (Inverse d'une matrice diagonale)
Soit $D = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$ une matrice diagonale. D est inversible ssi $\forall i \in [\![1, n]\!], d_i \neq 0$. Dans ce cas,

$$D^{-1} = \mathrm{Diag}(\frac{1}{d_1}, \ldots, \frac{1}{d_n}).$$

Théorème 3.22 (Critère d'inversibilité pour une matrice triangulaire)
Une matrice triangulaire T supérieure est inversible ssi tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas, T^{-1} est aussi une matrice triangulaire supérieure.