Suites numériques

1 Densité

Exercice 1. ♣ – ●◐○ – *Densité de* $\cos(n)$

On admet que π est irrationnel. Montrer que $\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 2. ♣ – ●◐○ – *Densité des* $2^a 3^b$

Montrer que $\{2^a 3^b, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

2 Suites récurrentes, suites implicites

Exercice 3. ◐○○ – *Suites récurrentes linéaires d'ordre* 2

1. Déterminer le terme général de la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n)$.
2. Déterminer le terme général de la suite (v_n) vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 2i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 2(i+1)v_{n+1} - 2i v_n$.
3. Déterminer toutes les suites (w_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} - 5w_{n+1} + 6w_n = 0$.

Exercice 4. ●◐○ – *Proches de récurrences simples*

1. Déterminer le terme général de (u_n) vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{u_{n+2}} = \dfrac{1}{u_{n+1}} + \dfrac{1}{u_n}$.
2. Déterminer les suites (v_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = n$.
3. Déterminer les suites (w_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = 2w_{n+1} - w_n + n + 1$.

Exercice 5. ♣ – ●◐○ – *Suites récurrentes avec racine*

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}}$. Étudier la suite (u_n^2) et en déduire la nature de (u_n).
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{v_n + \dfrac{1}{2^n}}$.
   (a) Montrer que l'équation $x^2 - x - \dfrac{1}{2^n} = 0$ admet une unique solution α_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour $n \geq 2$, $v_n > \alpha_n$.
   (b) En déduire les variations de (v_n) et déterminer sa limite.

Exercice 6. ●●○ – *Récurrence et inégalités*

1. Soit (u_n) une suite réelle positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leq \dfrac{u_{n+1}+u_n}{3}$.
   Montrer que (u_n) converge vers 0.

2. Soit (v_n) une suite réelle positive. On suppose qu'il existe $\alpha, \beta \geq 0$ tels que $\alpha+\beta<1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+3} \leq \alpha v_{n+2} + \beta v_n$. Montrer que (v_n) converge vers 0.

Exercice 7. ♣ – ●●○ – *Une équation fonctionnelle*

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\forall x > 0, f\big(f(x)\big) = 6x - f(x)$.

Exercice 8. ●●○ – *Récurrence $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$*

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante. En déduire sa limite.

2. On pose $v_n = e^{u_n}$. Montrer que $\lim_n (v_{n+1} - v_n) = 1$.

3. En utilisant le théorème de Cesàro, montrer que $v_n \sim n$, puis que $u_n \sim \ln n$.

Exercice 9. ●◐○ – *Suite implicite, $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$*

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On la note x_n.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2} \leq x_n \leq 1$.

3. Montrer que (x_n) est décroissante, et déterminer sa limite.

Exercice 10. ●●○ – *Suite implicite, $x + \ln x = n$*

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln x = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la note u_n.

2. Montrer que (u_n) est croissante et déterminer sa limite.

3. En déduire un équivalent de u_n.

3 Limites, asymptotique

Exercice 11. ♣ – ●◐○ – *Calcul de limites*

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$;

2. $b_n = \sqrt[n]{n^2}$;

3. $c_n = \left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{1/n}$;

4. $d_n = \ln\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}\right)$;

5. $e_n = n^2(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}})$;

6. $f_n = n(\sqrt[n]{3} - 1)$;

7. $g_n = \left(\dfrac{3^{1/n} + 7^{1/n}}{2}\right)^n$;

8. $h_n = \dfrac{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor^2}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor^2}$.

Exercice 12. ♣ – ●◐○ – *Calcul d'équivalents*

Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

1. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

2. $v_n = \sqrt{n^2 + \sqrt{n+1}} - \sqrt{n^2 + \sqrt{n-1}}$.

Exercice 13. ♣ – ●◐○ – *Limites, avec des sommes*

Étudier la convergence des suites suivantes : $(x \in \mathbb{R})$

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$;

2. $v_n = \displaystyle\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$;

3. $w_n = \displaystyle\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k!$;

4. $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$;

5. $y_n = \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$.

Exercice 14. ●○○ – *Forme indéterminée* $1^{+\infty}$

Soit $\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Déterminer deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim_n u_n = 1$, $\lim_n v_n = +\infty$ et $\lim_n u_n^{v_n} = \ell$.

Exercice 15. ●◐○ – $\sin\left((3+\sqrt{5})^n \pi\right)$

Déterminer la limite de $\left(\sin\left((3+\sqrt{5})^n \pi\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 16. ●◐○ – *Équivalent de* $\sum k^\alpha$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, k^\alpha \le \displaystyle\int_k^{k+1} x^\alpha \, dx \le (k+1)^\alpha$.

2. En déduire un équivalent de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$.

Exercice 17. ●◐○ – *Constante d'Euler-Mascheroni*

Soient $(u_n)_{n \ge 1}$ et $(v_n)_{n \ge 1}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \text{ et } v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire l'existence d'un réel γ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

Exercice 18. ♣ – ●●○ – *Racines itérées*

1. Soit (u_n) définie pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}}.$$

   (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1}^2 \leq 1 + \sqrt{2} u_n$.

   (b) En déduire que (u_n) est majorée, puis qu'elle converge.

2. *Cas général.* Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs. On définit, pour $n \geq 1$:

$$u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \cdots + \sqrt{a_n}}}}.$$

   (a) Montrer que (u_n) converge ssi $(a_n^{2^{-n}})$ est bornée.

   (b) Étudier les cas $a_n = (n!)^n$ et $a_n = n^{n!}$.

4 Suites extraites, valeurs d'adhérence

Exercice 19. ◐○○ – *Manipulation de suites extraites*

Soit (u_n) une suite réelle.

1. Montrer que si (u_n) est croissante et si (u_{2n}) converge, alors (u_n) converge.

2. Montrer que si (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, alors (u_n) converge.

Exercice 20. ●○○ – *Suites extraites et bornes*

Soit (u_n) une suite de réels positifs.

1. Montrer que si (u_n) n'est pas majorée, elle admet une suite extraite qui tend vers $+\infty$.

2. Montrer que si (u_n) ne tend pas vers $+\infty$, elle admet une suite extraite bornée.

Exercice 21. ●●○ – *Conditions de convergence, avec suites extraites*

Soit (u_n) une suite réelle.

1. On suppose que, pour un $k \in \mathbb{N}^*$, (u_{kn}) converge et que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0. Montrer que (u_n) converge.

2. On suppose que (u_{n^2}) converge et que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0. Peut-on en déduire que (u_n) converge ?

3. On suppose que (u_{kn}) converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Peut-on en déduire que (u_n) converge ?

Exercice 22. ●●○ – *Restrictions sur l'ensemble des valeurs d'adhérence*

1. Soient $a < b$ deux réels. Montrer qu'il n'existe aucune suite réelle dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $]a, b[$.
2. Existe-t-il une suite dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $\mathbb{R}$?

Exercice 23. ♣ – ●●○ – *Valeurs d'adhérence d'une suite qui s'épuise*

Soit (u_n) une suite de réels telle que $\lim_n (u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle.

Exercice 24. ●●○ – *Limites supérieure d'une suite*

Soit (u_n) une suite réelle bornée. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sup_{p \geq n} u_p$.

1. Justifier l'existence de (v_n) et montrer que (v_n) converge.
2. Montrer que la limite α de (v_n) est une valeur d'adhérence de (u_n).
   Ceci fournit une autre preuve du théorème de Bolzano-Weiestrass.
3. Montrer que α est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n).
   On l'appelle limite supérieure de (u_n) et on la note $\overline{\lim}\, u_n$.

5 Théorème de Cesàro

Exercice 25. ●◐○ – $u_{n+1} = \sqrt{u_0 + \cdots + u_n}$

Soit (u_n) une suite réelle définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_0 + \cdots + u_n}$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n seulement. En déduire que (u_n) est croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$.
2. Montrer que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers $1/2$. En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 26. ●◐○ – *Généralisation de Cesàro*

Soit (α_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)_n$ tend vers $+\infty$. Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers ℓ. Montrer que

$$\lim_n \frac{\sum_{k=0}^n \alpha_k u_k}{\sum_{k=0}^n \alpha_k} = \ell.$$

Exercice 27. ●●○ – *Cesàro binomial*

Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers ℓ. Montrer que

$$\lim_n \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k = \ell.$$

Exercice 28. ●●○ – *Produit de convolution de deux suites*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant respectivement vers u et v. Déterminer

$$\lim_n \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Exercice 29. ●●◐ – *Où est Cesàro ?*

Soient $z_1, \dots, z_p$ des nombres complexes de module 1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = z_1^n + \cdots + z_p^n$. On suppose que (u_n) converge. Déterminer sa limite.

6 Suites à valeurs complexes

Exercice 30. ◐○○ – *Valeurs d'adhérence d'une suite complexe*

Donner un exemple de suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, n'ayant aucune valeur d'adhérence, mais telle que $(\operatorname{Re} z_n)$ et $(\operatorname{Im} z_n)$ en aient dans $\mathbb{R}$.

Exercice 31. ●○○ – *Récurrence avec le conjugué*

Déterminer toutes les suites $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = 3z_n - \overline{z_n}.$$

Exercice 32. ♣ – ●◐○ – *Géolocalisation en 2D*

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $a \in \mathbb{C}$, la suite $\big(|z_n - a|\big)$ converge. Montrer que (z_n) converge.

Exercice 33. ●●○ – *Divergence de* $\cos(n\theta)$ *et* $\sin(n\theta)$

Soit $\theta \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos(n\theta)$ et $v_n = \sin(n\theta)$.

1. Montrer que (u_n) converge ssi (v_n) converge.
2. En déduire que (u_n) et (v_n) divergent.

7 Autres exercices

Exercice 34. ◐○○ – *Min et max de suites*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes. Montrer que $\big(\min(u_n, v_n)\big)$ et $\big(\max(u_n, v_n)\big)$ convergent.

Exercice 35. ◐○○ – *Suite d'entiers*

Montrer que $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ converge ssi elle est stationnaire.

Exercice 36. ♣ – ●◐○ – *Des infinis toujours plus petits*

Soit (u_n) une suite de réels tendant vers $+\infty$. Montrer qu'il existe une suite de réels (v_n) tendant vers 0, telle que $(u_n v_n)$ tende vers $+\infty$.

Exercice 37. ●◐○ – *Suites à croissance presque géométrique*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs strictement positives.

1. On suppose que $\lim_n \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_n \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

2. En déduire $\lim_n \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ et $\lim_n \binom{2n}{n}^{1/n}$.

Exercice 38. ♣ – ●●○ – *Suite de rationnels tendant vers un irrationnel*

Soit $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, soient $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tels que $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$ converge vers x. Montrer que

$$\lim_n |p_n| = \lim_n |q_n| = +\infty.$$

Exercice 39. ♣ – ●●◐ – *Suites convexes*

Soit (u_n) une suite réelle bornée. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \geq 0$.

1. Montrer que (u_n) décroît.

2. Montrer que $v_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 40. ♣ – ●●◐ – *Suites sous-additives, lemme de Fekete*

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que, pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+p} \leq x_n + x_p$. On pose

$$E = \left\{\frac{x_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

1. Vérifier que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \geq d$:

$$\frac{x_n}{n} \leq \frac{x_d}{d} + 2\frac{X_d}{n},$$

   où $X_d = \max\big(|x_1|, \ldots, |x_d|\big)$.

2. En déduire que si E est minoré, alors $\lim_n \dfrac{x_n}{n} = \inf(E)$.

3. Que se passe-t-il si E n'est pas minoré ?

Exercice 41. ♣ – ●●◐ – *Nombre de diviseurs*

Pour tout $n \geq 1$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n.

1. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $\big(d(n)\big)_{n\geq 1}$.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $d(n) = O\big(n^{\varepsilon}\big)$.
3. Pour tout $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et on rappelle que $H_n \sim \ln n$.
   Déterminer un équivalent de
   $$u_n = \sum_{k=1}^{n} d(k).$$

Indications

Exercice 1. Utiliser la périodicité de cos et la structure des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Une valeur pour f en donne une infinité. Comment paramétrer l'ensemble des solutions ?

Exercice 12. Factoriser par le terme dominant dans les sommes.

Exercice 13. Pour 3. et 4., déterminer quels sont les termes importants.

Exercice 15. On pourra considérer la somme $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$.

Exercice 23. Utiliser la caractérisation des intervalles comme parties convexes de $\mathbb{R}$. Entre deux valeurs d'adhérence, la suite fait une infinité d'allers-retours, avec des sauts de plus en plus petits.

Exercice 32. La distance à trois points dans le plan détermine un point. Une autre approche consiste à d'abord montrer que (z_n) est bornée et à exploiter le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 38. Proche de x, il n'y a qu'un nombre fini de rationnels dont le dénominateur est inférieur à une borne fixée.

Exercice 40. Pour 1., utiliser une division euclidienne.