DM 10 - Matrices à coefficients entiers - reprise

1 Généralités et exemples

1. Efficacité : élément neutre pour le produit, stabilité par différence, stabilité par produit

2. Le plus simple est d'utiliser les matrices de transvection introduites pour le pivot de Gauss. On peut aussi traiter le cas $n = 2$ puis définir des matrices par blocs, avec un bloc 2×2 dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Les règles de calcul sur ces matrices seront vues ultérieurement.

3. L'inclusion ne pose pas de difficultés. Elle est stricte car la matrice $2I_n$ est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$, mais pas dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ (de la même façon que le nombre 2 est inversible dans $\mathbb{Q}$ mais pas dans $\mathbb{Z}$)

4. Dire qu'une matrice de déterminant ± 1 est inversible (car déterminant non nul) ne suffit pas : l'inverse est *a priori* dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$). Il faut utiliser la formule explicite pour constater que l'inverse est à coefficients entiers.

   Bien distinguer les deux sens de cette équivalence.

5. **Matrices de permutation.**

   (a) Ou bien, on exhibe l'inverse (c'est $P_{\sigma^{-1}}$, à cause de la question suivante). Ou bien, on raisonne sur la tête de la matrice, par opérations élémentaires (plus laborieux).

   (b) Une somme du type $\sum_{i=1}^{n} f(i)\delta_{i,j}$ vaut $f(j)$. Par ailleurs, $\delta_{i,\sigma(j)} = \delta_{\tau(i),\tau(\sigma(j))}$. En effet, $i = \sigma(j)$ ssi $\tau(i) = \tau(\sigma(j))$ (car τ est bijective). Ceci suffit à mener à bien le calcul.

6. **Groupe diédral D_{12}.**

   (a) Trop d'erreurs de calculs élémentaires sur les complexes. Il n'y avait pas nécessairment besoin de calculer toutes les longueurs entre deux sommets, mais il fallait dire clairement que la distance entre deux sommets consécutifs n'est pas égale à la distance entre deux sommets qui ne le sont pas.

   (b) Formellement, la question précédente ne donne qu'une majoration $|D_{12}| \leq 12$. On a montré que 1 et α étaient envoyés sur deux sommets consécutifs ; pas que toutes les configurations étaient effectivement possibles.
   Le vocabulaire géométrique élémentaire est insuffisamment maîtrisé et trop peu essaient de se représenter les transformations de D_{12}, ce qui n'aide pas à la compréhension. Il y a dans D_{12} 6 rotations et 6 réflexions (= symétries axiales).

   (c) Une mini récurrence en utilisant $\alpha^2 = \alpha - 1$ est possible. En pratique, on a plus vite de faire un tableau récapitulatif.

   (d) Il s'agit d'une propriété de linéarité. On l'obtient en utilisant l'expression explicite de r et de s (et le fait que D_{12} est engendré par ces éléments).

(e) *L'application est bien définie* signifie ici de vérifier que les matrices à l'arrivée sont bien inversibles (confusion avec ce qu'il faut vérifier dans le cas d'applications définies sur un espace quotient dans certaines copies) ; le plus rapide pour ça est en fait de montrer d'abord qu'elle respecte bien le produit (et envoie id sur I_2). On dira plus tard qu'on représente les applications de D_{12} dans la base formée par 1 et α.

2 Ordre des éléments de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$

1. Un petit calcul. Ceci sera généralisé en toute dimension par le théorème de Cayley-Hamilton.
2. Rédactions souvent confuses. Il ne faut pas raisonner par équivalence. On utilise les différentes caractérisations d'un système de Cramer et le critère d'inversibilité d'une matrice donnée par le déterminant.
3. Attention ! Même si $\lambda^m = 1$, on n'a pas nécessairement $\lambda = \pm 1$. En effet, λ peut être complexe ! Le plus simple est de remarquer que la trace est la somme des deux racines du polynôme caractéristique et d'appliquer l'inégalité triangulaire.
4. A priori, on a 5 valeurs possibles pour la trace et 2 pour le déterminant. Il faut voir que seules 6 des 10 possibilités arrivent. Eliminer 4 polynômes en considérant leurs racines est possible mais un peu long ; le mieux est de remarquer que si le déterminant vaut -1, les racines valent nécessairement l'une 1 et l'autre -1 et donc la trace vaut 0.
5. On exhibe des matrices et on précise leur ordre.
6. L'idée de base est de constater que chacun des polynômes (sauf P_1 et P_2) sont des facteurs d'un polynôme $X^n - 1$. Pour P_1 et P_2, cf. corrigé.

3 Sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$

1. (a) Définir clairement qui est r (la valuation p-adique minimale d'un coefficient de $M - I_n$).
   (b) RAS
   (c) Pour les justifications d'ordre, attention à ne pas juste dire que $(M')^{m'} = I_n$ (cela montre seulement que l'ordre divise m'). Pour le calcul, la conclusion sur N' est trop bâclée. Même si le problème n'est pas évident au premier abord, il faut au moins se demander où on a utilisé l'hypothèse $p \geq 3$ dans l'exercice ; on peut ainsi être un peu plus prudent.
   (d) RAS
2. Pas de difficultés particulières mais les calculs doivent être écrits, sinon on ne justifie rien.
3. Plutôt bien compris. Ne pas rester avec un p quelconque à la fin : on optimise en prenant $p = 3$ pour avoir la constante la plus petite.
4. Un petit catalogue des cas. On y arrive plus ou moins rapidement ; attention ! beaucoup affirment considérer toutes les matrices non inversibles en distinguant selon leur nombre de zéros ; c'est possible mais souvent il n'est absolument pas clair qu'on a bien traité tous les cas. Une formule générale pour le cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ sera donnée plus tard.
5. RAS