DM 11 - Lemme de Fekete et applications

1 Lemme de Fekete

1. Soient n, d deux entiers tels que $n \geq d$. La propriété vérifiée par (x_n) donne $x_{2n} \leq x_n + x_n = 2x_n$, puis $x_{3n} \leq x_{2n} + x_n \leq 3x_n$, etc. Par récurrence immédiate, on en déduit que
$$x_{qd} \leq q x_d.$$
Comme $x_n = x_{qd+r} \leq x_{qd} + x_r$, on en déduit $x_n \leq q x_d + x_r$.

2. On divise l'inégalité précédente par n :
$$\frac{x_n}{n} \leq \frac{q}{n} x_d + \frac{1}{n} x_r.$$
Comme $n = qd + r$, on a $\frac{q}{n} = \frac{n-r}{n}\frac{1}{d}$. D'où :
$$\frac{x_n}{n} \leq \frac{x_d}{d} - \frac{1}{n}\frac{r}{d} x_d + \frac{1}{n} x_r.$$
Comme $r \leq d$, $-\frac{r}{d} x_d \leq X_d$ (attention, x_d peut être négatif !). De plus, $x_r \leq X_d$. On en déduit que :
$$\frac{x_n}{n} \leq \frac{x_d}{d} + 2\frac{X_d}{n}.$$

3. Notons $\ell = \inf(E)$. Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{x_d}{d} \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $n \geq d$. D'après la question précédente, on a
$$\frac{x_n}{n} \leq \frac{x_d}{d} + 2\frac{X_d}{n},$$
où $X_d = \max(|x_1|, \ldots, |x_d|)$. La suite $\left(2\frac{X_d}{n}\right)_n$ tend vers 0 ; il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n$, $2\frac{X_d}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, pour tout $n \geq \max(d, N)$, on a :
$$\frac{x_n}{n} \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \ell + \varepsilon.$$
De plus, on a $\frac{x_n}{n} \geq \ell$ car $\frac{x_n}{n}$ est un élément de E, minoré par ℓ. Ainsi,
$$\forall n \geq \max(d, N), |\frac{x_n}{n} - \ell| \leq \varepsilon.$$
On en déduit que la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ tend vers ℓ.

2 Rayon spectral d'une matrice

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. La i-ème coordonné de MX est $[MX]_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j$. On a donc :
$$\left|[MX]_i\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}||x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| \times \|X\|.$$
Comme $\|MX\| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left|[MX]_i\right|$, on en déduit que :
$$\|MX\| \leq \Big(\max_{i \in [\![1,n]\!]} \big(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| \big) \Big) \|X\|.$$

2. Notons $A = \left\{ \dfrac{\|MX\|}{\|X\|}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\} \right\}$. Cet ensemble est non vide et il est majoré par $\max_{i \in [\![1,n]\!]} \big(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| \big)$, d'après la question précédente. Ainsi, $|||M|||$ est bien défini et
$$|||M||| \leq \max_{i \in [\![1,n]\!]} \big(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| \big).$$
Montrons qu'il y a en fait égalité. Notons $i_0 \in [\![1,n]\!]$ un indice tel que
$$\max_{i \in [\![1,n]\!]} \big(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| \big) = \sum_{j=1}^{n} |m_{i_0,j}|.$$
Posons $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coordonnées x_k valent 1 si $m_{i_0,k} \geq 0$ et -1 sinon. On a $\|X\| = 1$. De plus,
$$[MX]_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} m_{i_0,j} x_j = \sum_{j=1}^{n} |m_{i_0,j}|.$$
Ceci montre que
$$\|MX\| \geq \sum_{j=1}^{n} |m_{i_0,j}| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \big(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| \big).$$
Alors $|||M||| \geq \dfrac{\|MX\|}{\|X\|}$, d'où
$$|||M||| \geq \max_{i \in [\![1,n]\!]} \big(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| \big).$$
D'où l'égalité annoncée.

3. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a
$$\|MNX\| = \|M(NX)\| \leq |||M||| \, \|NX\| \leq |||M||| \, |||N||| \, \|X\|.$$
Ainsi, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$,
$$\frac{\|MNX\|}{\|X\|} \leq |||M||| \, |||N|||.$$
Par définition de $|||MN|||$, on en déduit que $|||MN||| \leq |||M||| \, |||N|||$.

4. Il suffit dans la question précédente de remplacer M par M^n et N par M^p.

5. On suppose que λ et X sont comme dans l'énoncé. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par une récurrence immédiate, on montre que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $M^i X = \lambda^i X$. En particulier, $M^k X = \lambda^k X$. On a donc :

$$\|M^k X\| = \|\lambda^k X\| = |\lambda^k| \|X\|$$

car on constate que $\|\mu Y\| = |\mu| \|Y\|$, pour tout réel μ et $y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi,

$$\frac{\|M^k X\|}{\|X\|} = |\lambda|^k.$$

Par définition de $|||M^k|||$, on en déduit que $|||M^k||| \geq |\lambda|^k$.

6. Par la question précédente, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|||M^k||| > 0$, notons $v_k = \ln |||M^k|||$. On a

$$\frac{v_k}{k} = \ln u_k \geq \ln |\lambda|.$$

Ainsi, l'ensemble $\left\{\frac{v_k}{k}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$ est minoré.

Soient $k, p \in \mathbb{N}^*$, en passant au logarithme dans la question 4, on a

$$v_{k+p} = \ln |||M^{k+p}||| \leq \ln |||M^k||| + \ln |||M^p||| = v_k + v_p.$$

Ainsi, la suite (v_k) vérifie les conditions du lemme de Fekete. On en déduit que $(\frac{v_k}{k})$ converge. Et donc, la suite (u_k) – qui vérifie $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = \exp\left(\frac{v_k}{k}\right)$ – converge aussi.

7. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $MX = \lambda X$. Posons $Y = PX$. Alors,

$$NY = PMP^{-1}Y = PMX = P(\lambda X) = \lambda PX = \lambda Y.$$

De plus, $Y \neq 0$ (car sinon $X = P^{-1}Y$ serait nul aussi). Donc, si M vérifie la condition de la question 5, N aussi (avec le même λ). La réciproque s'obtient en échangeant le rôle de P et P^{-1}, du fait de la relation $M = P^{-1}NP$.

Comme $N = PMP^{-1}$, $N^2 = PMP^{-1}PMP^{-1} = PM^2P^{-1}$. Par une récurrence immédiate, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, N^k = PM^kP^{-1}.$$

Par l'inégalité de la question 3, on en déduit successivement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$|||N^k||| \leq |||P||| \, |||M^kP^{-1}||| \leq |||P||| \, |||M^k||| \, |||P^{-1}|||.$$

En passant à la racine k-ème :

$$|||N^k|||^{1/k} \leq |||P|||^{1/k} |||M^k|||^{1/k} |||P^{-1}|||^{1/k}.$$

On fait maintenant tendre k vers l'infini et on obtient à la limite :

$$\rho(N) \leq 1 \times \rho(M) \times 1 = \rho(M).$$

Comme N et M jouent un rôle symétrique, il y a en fait égalité $\rho(M) = \rho(N)$.

8. On suppose que M et D sont comme dans l'énoncé. Comme M est non nulle et que $M = P^{-1}DP$, D est non nulle également.

   Écrivons $D = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$. Alors, DX a pour coordonnées $(d_1 x_1, \ldots, d_n x_n)$. En particulier, considérons un indice i tel que $d_i \neq 0$. Alors, en prenant X tel que $x_k = \delta_{i,k}$, on a $DX = d_i X$, avec d_i et X non nuls. Donc D vérifie la condition de la question 5, donc M aussi.

   Pour calculer $\rho(D)$, on calcule en fait chaque $|||D^k|||$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $D^k = \mathrm{Diag}(d_1^k, \ldots, d_n^k)$. Par la question 2,

   $$|||D^k||| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |d_i^k| = \left(\max_{i \in [\![1,n]\!]} |d_i| \right)^k.$$

   Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|||D^k|||^{1/k} = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |d_i|$. En passant à la limite (la suite est donc constante), on a donc $\rho(M) = \rho(D) = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |d_i|$.

   Remarque : avec les notations de cette question, les d_i sont les valeurs propres de M. La quantité $\rho(M)$, définie de façon analytique est donc égale à la plus grande (en valeur absolue) des valeurs propres de M. Comme on appelle spectre l'ensemble des valeurs propres, ceci justifie le nom de rayon spectral. L'égalité entre $\rho(M)$ et la plus grande (en module) valeur propre est en fait vraie pour toute matrice non nulle (sans l'hypothèse diagonalisable).

3 Chemins auto-évitants dans $\mathbb{Z}^2$

1. On trouve de jolies illustrations sur la page Wikipedia : chemin auto-évitant.

2. On a $c_0 = 1$ et $c_1 = 4$. La seule restriction pour les chemins de longueur 2 est que le deuxième pas ne soit pas opposé au précédent. Donc $c_2 = 4 \times 3 = 12$. De même, étant donné un chemin quelconque de longueur 2, on peut le prolonger de 3 façons différentes en un chemin de longueur 3 (on ne peut pas revenir en le sommet d'origine). Donc $c_3 = 4 \times 3 \times 3 = 36$. Même raisonnement pour les chemins de longueur 4, mais il faut aussi retirer les 4 chemins qui reviennent au sommet d'origine en un cycle de longueur 4 ; il y a 8 tels chemins. Donc $c_4 = 36 \times 3 - 8 = 100$.

3. Notons $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des chemins de longueur n. Un élément de $\mathcal{C}_n$ s'écrit donc $(s_0, \ldots, s_n)$. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On définit une application Φ de $\mathcal{C}_{n+p}$ dans $\mathcal{C}_n \times \mathcal{C}_p$ par

   $$\Phi(s_0, \ldots, s_{n+p}) = \Big((s_0, \ldots, s_n), (s_0, s_{n+1} - s_n, s_{n+2} - s_n, \ldots, s_{n+p} - s_n) \Big).$$

   On a donc découpé un chemin auto-évitant en deux sous-chemins, et translaté le deuxième pour le faire démarrer à l'origine.

   On vérifie que Φ est bien définie et qu'elle est injective. En effet, si $(s_0, \ldots, s_{n+p})$ et $(s'_0, \ldots, s'_{n+p})$, on a déjà $(s_0, \ldots, s_n) = (s'_0, \ldots, s'_n)$. Puis, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $s_{n+k} - s_n = s'_{n+k} - s'_n$, ce qui implique $s_{n+k} = s'_{n+k}$, puisqu'on sait déjà que $s_n = s'_n$. Ainsi

   $$c_{n+p} \leq c_n c_p.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les chemins de longueur n dont les pas sont $(1,0)$ et $(0,1)$ sont auto-évitants. On en déduit que $c_n \geq 2^n$. On en déduit que la suite $(\dfrac{\ln c_n}{n})$ est minorée par $\ln 2$. Par la question précédente, elle vérifie la condition du lemme de Fekete, donc elle converge vers un réel $\geq \ln 2$. Alors, $\sqrt[n]{c_n} = \exp(\dfrac{\ln c_n}{n})$ converge vers un réel $\mu \geq 2$.

   La majoration $\mu \leq 3$ vient de ce que, pour tout entier $n \geq 2$, $c_n \leq 4 \times 3^{n-1}$ (car un pas ne peut pas être égal à l'opposé du pas précédent). En passant à la racine n-ème et à la limite, on en déduit $\mu \leq 3$.

5. On a $c_n \sim c\mu^n n^\gamma$. Donc, $c_{n+1} \sim c\mu^{n+1}(n+1)^\gamma$. Par quotient d'équivalents :

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \sim \frac{c\mu^{n+1}(n+1)^\gamma}{c\mu^n n^\gamma} = \mu(1+\frac{1}{n})^\gamma \sim \mu.$$

   Donc $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ tend vers μ.

6. Étant donnés deux chemins auto-évitants de longueur n, on peut les concaténer (en opérant une translation du deuxième chemin pour qu'il démarre à la fin du premier) pour obtenir un chemin de longueur $2n$. Ce chemin ne sera pas nécessairement auto-évitant. La quantité $\dfrac{c_{2n}}{c_n^2}$ s'interprète comme la probabilité pour que la concaténation de deux chemins auto-évitants de longueur n, donne un chemin auto-évitant de longueur $2n$.

   On a $c_{2n} \sim c\mu^{2n}(2n)^\gamma$ et $c_n^2 \sim c^2\mu^{2n}n^{2\gamma}$. Donc, par quotient d'équivalents :

$$\frac{c_{2n}}{c_n^2} \sim \frac{c\mu^{2n}(2n)^\gamma}{c^2\mu^{2n}n^{2\gamma}} = \frac{2^\gamma}{c}n^{-\gamma}.$$

7. La constante γ doit être positive ou nulle. Sinon l'équivalent précédent montrerait que $\dfrac{c_{2n}}{c_n^2}$ tend vers $+\infty$, ce qui est absurde (on sait que la fraction est inférieure à 1). Supposons que $\gamma > 0$. Alors, dans l'équivalent précédent, les suites tendent vers 0. D'après le cours, on peut passer au logarithme dans ces équivalents et on a donc :

$$\ln\left(\frac{c_{2n}}{c_n^2}\right) \sim \gamma \ln 2 - \ln c - \gamma \ln n \sim -\gamma \ln n.$$

   On en déduit que

$$\gamma = \lim_n \frac{2\ln c_n - \ln c_{2n}}{\ln n}.$$

8. cf. Fekete.py

9. Bonus : écrire un programme calculant c_n et vérifier empiriquement les valeurs de μ et γ.