

## DM 11 - Lemme de Fekete et applications

### 1 Lemme de Fekete

1. Il n'y a pas besoin de faire la récurrence sur  $q$  pour montrer que  $x_{qd} \leq qx_d$  mais il faut au moins évoquer une telle récurrence.
2. Dans de nombreuses copies, les inégalités sont écrites en supposant implicitement que  $x_d \geq 0$ , ce qui n'est pas le cas. Le facteur 2 est nécessaire ; les élèves qui trouvent une meilleure minoration avec un 1 à la place du 2 doivent interroger leur démonstration (*même si bien sûr une erreur d'énoncé est toujours possible*).
3. Il faut écrire des  $\varepsilon$  pour cette démonstration. Attention à ne pas parler de la limite de  $\frac{x_n}{n}$  tant qu'on ne sait pas que cette limite existe (si on sait qu'elle existe, la question est plus simple).

### 2 Rayon spectral d'une matrice

1. Calculs parfois confus. Il ne faut pas confondre  $|\sum m_{i,j}|$  et  $\sum |m_{i,j}|$  et appliquer correctement l'inégalité triangulaire.
2. La question précédente donne un majorant de l'ensemble des  $\frac{\|MX\|}{\|X\|}$ . Il s'agit de montrer qu'il y a en fait égalité, en construisant un  $X$  particulier, pour lequel il y a égalité. Attention aux signes !
3. Le plus simple est d'utiliser directement la définition de  $\|M\|$ , mais on peut aussi utiliser la formule de la question précédente (dans ce cas, bien détailler les différentes étapes de calculs).
4. Application immédiate.
5. L'égalité  $M^n X = \lambda^n X$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  peut être admise (en évoquant une récurrence immédiate).
6. L'inégalité de la question 4 se traduit par une inégalité du type sous-additif en passant au logarithme. Souvent, le lemme de Fekete est appliqué sans que l'hypothèse *E minoré* n'est vérifiée...
7. On demande de vérifier l'équivalence des conditions sur  $M$  et  $N$  : pas des conclusions. Attention aux mots ! On peut procéder par équivalences ou comme dans le corrigé.
8. RAS.

### 3 Chemins auto-évitant dans $\mathbb{Z}^2$

1. Un dessin et des explications sont attendus.
2. Trop d'élèves font des calculs sans dire ce qu'ils calculent. Il n'y a pas besoin de longues explications pour les calculs de  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$ . Mais  $c_4$  demande un peu de détails. De façon générale, adapter le niveau de justification à la difficulté de la question.
3. Bien compris mais très rarement formalisé correctement. La meilleure façon d'expliquer qu'un chemin *correspond* à deux chemins est de définir une application entre ensembles de chemins et de l'étudier (en l'occurrence, montrer son injectivité). On peut faire moins détaillé mais il faut être clair.
4. Attention, on n'a pas  $c_n \leq 3^n$  (et on n'en a pas besoin). De nouveau, pour appliquer le lemme de Fekete, il faut d'abord montrer que l'ensemble  $E$  (notations de la question I.3.) est minoré.
5. Ne pas hésiter à utiliser des équivalents.
6. De même.
7. RAS.