DM 11 - Applications du lemme de Fekete

On donne des applications du lemme de Fekete, démontré en TD – Exercice 40.

La partie 1 ne sera pas corrigée car elle a été traitée en TD. Je vous invite cependant à vérifier que la technique est bien comprise ; notamment les manipulations epsilonesques, question 3.

1 Lemme de Fekete

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que, pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+p} \leq x_n + x_p$. On pose

$$E = \left\{ \frac{x_n}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Si $n \geq d$, on note $n = dq + r$, la division euclidienne de n par d. Montrer que

$$x_n \leq q x_d + x_r.$$

2. En déduire que

$$\forall n \geq d, \frac{x_n}{n} \leq \frac{x_d}{d} + 2\frac{X_d}{n},$$

   où $X_d = \max\Big(|x_1|, \dots, |x_d|\Big)$.

3. On suppose que E est minoré. Montrer que $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ tend vers $\inf(E)$.

   C'est le lemme sous-additif, ou lemme de Fekete.

2 Rayon spectral d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on définit $\|X\| = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|$.

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|MX\| \leq \Big(\max_{i \in [\![1,n]\!]} \Big(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| \Big) \Big) \|X\|.$$

2. En déduire que la quantité

$$|||M||| = \sup_{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}} \frac{\|MX\|}{\|X\|}$$

   est bien définie et déterminer une expression de $|||M|||$ en fonction des coefficients de M.

3. Montrer que pour tous $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||MN||| \leq |||M||| \times |||N|||$.

4. En déduire que, pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$,
$$|||M^{n+p}||| \leq |||M^n||| \times |||M^p|||.$$

5. On suppose désormais qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$ tel que $MX = \lambda X$. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |||M^n||| \geq |\lambda|^n.$$

6. En utilisant le lemme de Fekete, en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \sqrt[n]{|||M^n|||}$ a une limite finie strictement positive, qu'on note $\rho(M)$.

7. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $PMP^{-1} = N$. Montrer que la condition de la question 5 est vérifiée par M ssi elle est vérifiée par N. Montrer que, dans ce cas, $\rho(M) = \rho(N)$.

8. On suppose que M est non nulle et diagonalisable : il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $PMP^{-1} = D$. Montrer que $\rho(M)$ est bien défini et déterminer sa valeur, en fonction des coefficients diagonaux de D.

3 Chemins auto-évitants dans $\mathbb{Z}^2$

Un pas dans $\mathbb{Z}^2$ est un élément de $\mathscr{P} = \{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}$. Un chemin de longueur $n \in \mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}^2$ est une $(n+1)$-liste $(s_0, \ldots, s_n)$ d'éléments de $\mathbb{Z}^2$ telle que $s_0 = (0,0)$ et, telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $s_{k+1} - s_k$ est un pas. Un tel chemin est auto-évitant si la liste est sans répétition. On note c_n le nombre de chemins de longueur n auto-évitants.

1. Illustrer ces définitions.

2. Déterminer c_n pour $n \in [\![0, 4]\!]$.

3. Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $c_{n+p} \leq c_n c_p$.

4. En déduire que la suite $(\sqrt[n]{c_n})_{n\geq 1}$ converge vers un réel[1] $\mu \in [2, 3]$.

Une conjecture affirme qu'il existe deux constantes c et γ telles que $c_n \sim c\mu^n n^\gamma$. On suppose dans la suite que cette conjecture est vraie.

5. Montrer que $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ tend vers μ.

6. Interpréter la quantité $\dfrac{c_{2n}}{c_n^2}$ et en déterminer un équivalent.

7. En déduire une expression de la constante[2] γ comme la limite d'une suite ne dépendant que de c_n.

8. Bonus : écrire un programme calculant c_n et vérifier empiriquement les valeurs de μ et γ.

---

[1] La valeur exacte est inconnue. On sait cependant que $\mu \in [2,6; 2,7]$. Pour le problème analogue où on considère des chemins sur le réseau hexagonal (les pas sont les racines 6-èmes de l'unité), la constante μ vaut $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, *Smirnov et Duminil-Copin, 2008*.

[2] Il est aussi conjecturé que $\gamma = \dfrac{11}{32}$.