DM 12 - Fonction de Takagi

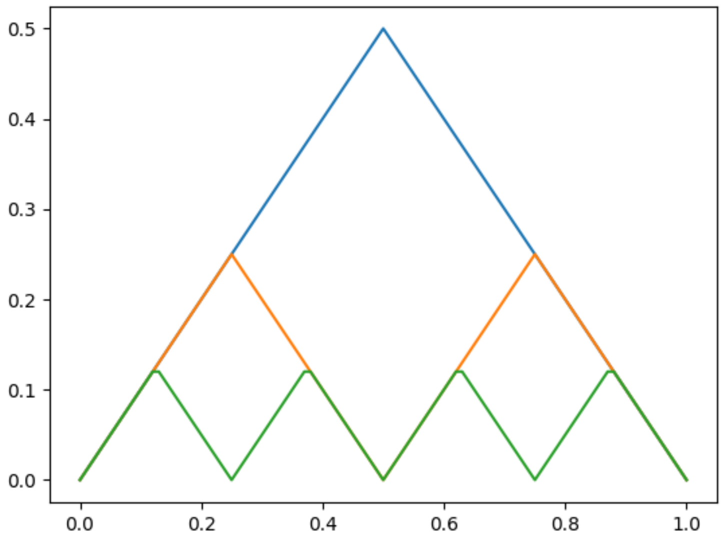
1 Construction de la fonction de Takagi

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\left\{|x-k|, k \in \mathbb{Z}\right\}$ est une partie de $\mathbb{R}_+$ non vide. Elle admet donc une borne inférieure.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $k \in \mathbb{Z}$. Si $k \leq \lfloor x \rfloor$, on a $|x-k| = x-k \geq x - \lfloor x \rfloor = |x - \lfloor x \rfloor|$. Et si, $k \geq \lfloor x \rfloor + 1$, on a de même, $|x-k| \geq |\lfloor x \rfloor + 1 - x|$.

   Ainsi, $g(x) = \min(x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x)$.

3. Le graphe de g_n est obtenu en contractant celui de g par un facteur 2^n horizontalement et verticalement (par rapport aux axes de coordonnées). On a les graphes suivants : (en bleu : g_0, en jaune : g_1 et en vert : g_2 ; les couleurs se superposent)



4. Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$g_n(x+1) = \frac{g(2^n(x+1))}{2^n} = \frac{g(2^n x)}{2^n} = g_n(x).$$

   On utilise que $g(2^n(x+1)) = g(2^n x + 2^n) = g(2^n x)$, car g est 1-périodique. Donc, g_n est 1-périodique pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Notons $k \in \mathbb{Z}$ tel que $g(x) = |x-k|$ (la question 2 montre que l'inf est en fait un minimum). On a alors

$$|y-k| \leq |x-k| + |y-x|$$

par inégalité triangulaire. D'où, par définition de $g(y)$: $g(y) \leq g(x) + |y-x|$. Par symétrie des rôles joués par x et y, on a aussi $g(x) \leq g(y) + |y-x|$. Donc,

$$|g(y) - g(x)| \leq |y-x|.$$

Donc g est 1-lipschitzienne. Considérons alors $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$|g_n(y) - g_n(x)| = \frac{|g(2^n y) - g(2^n x)|}{2^n} \leq \frac{2^n |y-x|}{2^n} = |y-x|.$$

Donc, g_n est aussi 1-lipschitzienne.

5. Soit $t \in [0,1]$. On cherche à évaluer $g_n(\dfrac{k+t}{2^{n+1}})$. On calcule :

$$\begin{aligned} g_n(\frac{k+t}{2^{n+1}}) &= \frac{g(\frac{k+t}{2})}{2^n} \\ &= \begin{cases} \frac{t}{2^{n+1}} & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{1-t}{2^{n+1}} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que g_n est affine sur $\left[\dfrac{k}{2^{n+1}}, \dfrac{k+1}{2^{n+1}}\right]$, de pente ± 1.

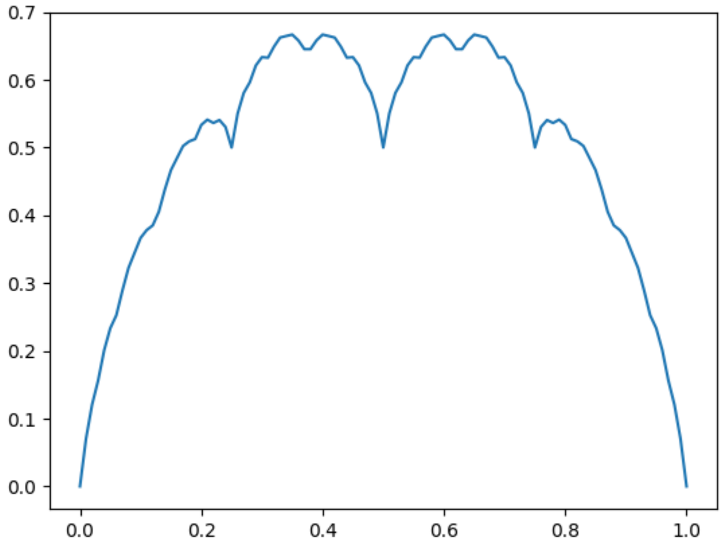
6. Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\tau_{n+1}(x) - \tau_n(x) = g_{n+1}(x) \geq 0$. Donc, $\big(\tau_n(x)\big)_n$ est croissante. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq g_k(x) \leq \dfrac{1}{2^{k+1}}$. On en déduit que $\tau_n(x) \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} \leq 1$. Ainsi, $\big(\tau_n(x)\big)$ est majorée par 1. Par le théorème de la limite monotone, cette suite converge.

7.
```
def gg(x):
    return min(x-int(x),int(x)+1-x)

def g(n,x):
    return gg(2**n*x)/(2**n)

def tau(n,x):
    S = 0
    for k in range(n):
        S+= g(k,x)
    return S
```

On trace $x \mapsto \tau(100, x)$ sur $[0,1]$:



2 Autour de la continuité de τ

8. On a $\tau(x) - \tau_n(x) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=n}^{N} g_k(x)$. Fixons $N \in \mathbb{N}$. On a

$$\left| \sum_{k=n}^{N} g_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^n}.$$

En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, on obtient $|\tau(x) - \tau_n(x)| \leq \dfrac{1}{2^n}$.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, τ_n est la somme de n fonctions 1-lipschitziennes. On en déduit immédiatement que τ_n est n-lipschitzienne. En particulier, τ_n est uniformément continue.

10. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $n \in \mathbb{N}$ tel $\dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$. Comme τ_n est uniformément continue, on peut trouver $\delta > 0$ tel que $|x - y| \leq \delta \implies |\tau_n(x) - \tau_n(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$ (comme τ_n est n-lipschitzienne, on peut prendre $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3n}$). Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| \leq \delta$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$|\tau(y) - \tau(x)| \leq |\tau(y) - \tau_n(y)| + |\tau_n(y) - \tau_n(x)| + |\tau_n(x) - \tau(x)| \leq 3 \times \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule $\tau_n(2^{-n})$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.

$$g_k(2^{-n}) = \frac{g(2^{k-n})}{2^k} = \frac{2^{k-n}}{2^k} = 2^{-n}.$$

Ainsi, $\tau(2^{-n}) \geq \tau_n(2^{-n}) = n \times 2^{-n}$. On a donc $\dfrac{\tau(2^{-n}) - \tau(0)}{2^{-n} - 0} \geq n$. Donc, les taux d'accroissement de τ ne sont pas bornés. Donc, τ n'est pas lipschitzienne.

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^{-n} \leq h < 2^{-n+1}$. On a donc $n-1 < \log_2\left(\frac{1}{h}\right)$. Par inégalité triangulaire, on a
$$|\tau(x+h)-\tau(x)| \leq |\tau(x+h)-\tau_n(x+h)| + |\tau_n(x+h)-\tau_n(x)| + |\tau_n(x)-\tau(x)|.$$
On majore le premier et le troisième terme par $\frac{1}{2^n}$, d'après la question 8. On majore le deuxième terme par nh (on a vu que τ_n est n-lipschitzienne). On a donc :
$$|\tau(x+h)-\tau(x)| \leq \frac{2}{2^n} + nh \leq h(2+n) < h\left(3+\log_2\left(\frac{1}{h}\right)\right).$$

13. Par croissance comparée, la fonction $h \mapsto h^{1-\alpha}\ln\left(\frac{1}{h}\right)$ tend vers 0 en 0. Il existe donc $\delta > 0$ tel que si $0 < h < \delta$, $h\left(3+\log_2\left(\frac{1}{h}\right)\right) \leq h^\alpha$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < |x-y| \leq \delta$. Par la question précédente, on a alors :
$$|\tau(y)-\tau(x)| \leq |y-x|\left(3+\log_2\left(\frac{1}{|y-x|}\right)\right) \leq |y-x|^\alpha.$$
Si $|y-x| \geq \delta$, on majore simplement $|\tau(y)-\tau(x)|$ par 2 (τ est majorée par 1). En posant $C = \max(1, \frac{2}{\delta^\alpha})$, on a alors :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |\tau(y)-\tau(x)| \leq C|y-x|^\alpha.$$

14. La 1-périodicité de τ a été montrée. La deuxième propriété vient de ce que $\forall x \in \mathbb{R}, g(1-x) = g(x)$. Montrons la troisième propriété. Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\begin{aligned}
\tau_n(\frac{x}{2}) &= \sum_{k=0}^{n-1} g_k(\frac{x}{2}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(2^{k-1}x)}{2^k} \\
&= g(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{n-2} \frac{g(2^\ell x)}{2^\ell} \\
\tau_n(\frac{x}{2}) &= g(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}\tau_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

En passant à la limite sur n, on obtient $\tau(x) = g(\frac{x}{2}) + \frac{\tau(x)}{2}$.

Montrons maintenant que τ est la seule fonction continue vérifiant ces trois propriétés. Soit f une fonction continue vérifiant ces trois propriétés.

Comme $g(0) = 0$, la troisième propriété évaluée en 0 donne $f(0) = 0$. Par 1-périodicité, on a $f(1) = 0$. La troisième propriété, évaluée en 1 donne $f(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Ensuite, la valeur en $1/4$ est obtenue en utilisant la troisième propriété, évaluée en $1/2$. On en déduit la valeur en $3/4$ par la deuxième propriété.

De façon générale, si on connait les valeurs de f en tous les rationnels de la forme $\frac{k}{2^n}$ avec n fixé et $k \in [\![0, 2^n]\!]$, on peut en déduire les valeurs de f en tous les rationnels de la forme $\frac{k}{2^{n+1}}$, avec

$k \in [\![0, 2^n]\!]$, en utilisant la troisième propriété sur $\frac{k}{2^n}$. Puis, on déduit les valeurs manquantes en $\frac{k}{2^{n+1}}$, avec $k \in [\![2^n + 1, 2^{n+1}]\!]$, en utilisant la deuxième propriété.

Ceci montre que si f vérifie ces trois propriétés, ses valeurs en tous les nombres dyadiques $\frac{k}{2^n}$ sont imposées. On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z}, f(\frac{k}{2^n}) = \tau(\frac{k}{2^n})$ (pour les dyadiques hors de $[0,1]$, on utilise la périodicité).

L'ensemble des nombres dyadiques est dense dans $\mathbb{R}$ (preuve analogue à celle pour les rationnels). Soit $x \in \mathbb{R}$. On peut trouver une suite q_n de dyadiques tendant vers x. On a pour tout n, $f(q_n) = \tau(q_n)$. Comme f est supposé continue (et que τ l'est), on en déduit en passant à la limite que $f(x) = \tau(x)$.

Finalement, τ est l'unique fonction continue vérifiant ces trois propriétés.

3 Non-dérivabilité de τ

15. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\lfloor 2^n x \rfloor \leq 2^n x < \lfloor 2^n x \rfloor + 1$. D'où l'on déduit les inégalités :

$$x - 2^{-n} < a_n \leq x < b_n \leq x + 2^{-n}.$$

On en déduit que (a_n) et (b_n) convergent vers x, par théorème d'encadrement.

16. On sait que a_n est de la forme $\frac{p}{2^n}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $b_n = a_n + 2^{-n}$. Donc $2^k a_n = \frac{p}{2^{n-k}}$. On écrit la division euclidienne de p par 2^{n-k} : $p = u2^{n-k} + r$, avec $r < 2^{n-k}$. Alors,

$$2^k a_n = u + \frac{r}{2^{n-k}} \text{ et } 2^k b_n = u + \frac{r+1}{2^{n-k}}.$$

Ou bien $r + 1 \leq 2^{n-k-1}$, alors $2^k a_n$ et $2^k b_n$ sont dans $[u, u+1/2]$ et $q = 2u$ convient. Ou bien $r + 1 > 2^{n-k-1}$ et donc $r \geq 2^{n-k-1}$. Dans ce cas, $2^k a_n$ et $2^k b_n$ sont dans $[u+1/2, u+1]$ et $q = 2u+1$ convient.

17. On reprends les notations de la question précédente. Dans le premier cas, on a

$$g(2^k a_n) - g(2^k b_n) = (2^k a_n - u) - (2^k b_n - u) = 2^k(a_n - b_n).$$

Dans le deuxième cas, on a

$$g(2^k a_n) - g(2^k b_n) = (u + 1 - 2^k a_n) - (u + 1 - 2^k b_n) = -(2^k a_n - 2^k b_n).$$

18. Soit $k \geq n$. Alors, comme $b_n = a_n + 2^{-n}$, $2^k a_n$ et $2^k b_n$ diffèrent par un entier. Par 1-périodicité de g, on a donc $g(2^k a_n) = g(2^k b_n)$.

19. On a (d'après la question précédente)

$$\tau(b_n) - \tau(a_n) = \tau_n(b_n) - \tau_n(a_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(2^k b_n)}{2^k} - \frac{g(2^k a_n)}{2^k}.$$

En notant ε_k des nombres égaux à ± 1, on a d'après la question 17 :

$$\tau(b_n) - \tau(a_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k (b_n - a_n).$$

Et donc $\dfrac{\tau(b_n)-\tau(a_n)}{b_n-a_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k$. Ainsi, $\dfrac{\tau(b_n)-\tau(a_n)}{b_n-a_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k$ est bien un entier, et il est égal à n modulo 2, c'est-à-dire qu'il a même parité que n.

20. Par définition de la dérivabilité, on a les égalités :

$$f(b_n) = f(x) + (b_n - x)f'(x) + o(b_n - x) \text{ et } f(a_n) = f(x) + (a_n - x)f'(x) + o(a_n - x).$$

Donc, $f(b_n)-f(a_n) = (b_n-a_n)f'(x)+o(b_n-x)+o(a_n-x)$. Comme $a_n \leq x < b_n$, on a $b_n-a_n \geq b_n - x$ et $b_n - a_n \geq x - a_n$. Ainsi, un $o(b_n - x)$ est aussi un $o(b_n - a_n)$ et de même un $o(a_n - x)$ est un $o(b_n - a_n)$ (*écrire avec des suites* ε_n *tendant vers* 0*, si ce n'est pas clair*).

Donc, $f(b_n)-f(a_n) = f'(x)(b_n-a_n)+o(b_n-a_n)$. En divisant par b_n-a_n, on a $\dfrac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = f'(x) + o(1)$. C'est-à-dire $\lim_n \dfrac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = f'(x)$.

21. Par l'absurde, on suppose τ dérivable en un réel x fixé. Les suites (a_n) et (b_n) introduites question 15 satisfont les hypothèses de la question précédente. On a donc :

$$\lim_n \frac{\tau(b_n)-\tau(a_n)}{b_n-a_n} = \tau'(x).$$

Mais d'après la question 19, ce quotient est un entier, dont la parité est celle de n. Par définition de la limite, il devrait exister $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, ce quotient est proche de $\tau'(x)$ à $1/3$ près. Comme aucun nombre réel n'est proche à $1/3$ près à la fois d'un nombre pair et d'un nombre impair, c'est absurde.

Donc τ n'est nulle part dérivable.