Convexité

1 Théorie

Exercice 1. ◐○○ – *Deux fonctions convexes dont la somme est affine*

Soient f, g deux fonctions convexes définies sur un intervalle I.
Montrer que si $f+g$ est affine, alors f et g sont affines.

Exercice 2. ♣ – ●◐○ – *Asymptotique d'une fonction convexe*

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que si f est strictement croissante, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ a une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que si $\ell \leq 0$, alors f est décroissante.
4. On suppose que $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(x) - \ell x$ a une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 3. ●◐○ – *Minimum d'une fonction convexe*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si f admet un minimum local, il s'agit d'un minimum global.
   Que peut-on dire de l'ensemble des points où ce minimum est atteint ?
2. On suppose que f est dérivable et qu'il existe a tel que $f'(a) = 0$.
   Montrer que f admet en a un minimum global.

Exercice 4. ♣ – ●●○ – *Une condition suffisante de convexité*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit f une fonction continue sur I. On suppose

$$\forall x, y \in I, f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.

Exercice 5. ●●○ – *Convexité de $f(1/x)$ et $xf(x)$*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$, soit $f : I \to \mathbb{R}$. On note $J = \Big\{\frac{1}{x}, x \in I\Big\}$. Montrer que $g : J \to \mathbb{R}, x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est convexe ssi $h : I \to \mathbb{R}, x \mapsto xf(x)$ est convexe.

Exercice 6. ♣ – ●●○ – *Fonctions log-convexes*

Soit $f : I \to \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est log-convexe sur I si $\ln \circ f$ est convexe sur I.

1. Montrer que si f est log-convexe, alors elle est convexe. Que dire de la réciproque ?
2. Montrer que f est log-convexe ssi pour tout $\alpha > 0$, f^α est convexe.
3. Montrer que f est log-convexe ssi pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\alpha x} f(x)$ est convexe.
4. Montrer que le produit et la somme de deux fonctions log-convexes est log-convexe.

Exercice 7. ♣ – ●●○ – *Une fonction convexe est continue*

Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert I. Montrer que f est continue.

Exercice 8. ♣ – ●●◐ – *Pseudo-dérivée au sens de Schwarz*

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que pour tout $x \in I$,

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

tend vers une limite finie $g(x)$.

1. Que vaut g si f est deux fois dérivable ?
2. On suppose que $g > 0$ sur I. Montrer que f est convexe.
3. On suppose que $g \geq 0$. Montrer que f est convexe.

2 Applications

Exercice 9. ●○○ – *Comparaison des moyennes arithmétique*

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Exercice 10. ●◐○ – *Une inégalité sur les triangles*

Montrer que sin est concave sur $[0, \pi]$. Déterminer $\sup\limits_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=\pi \\ \alpha,\beta,\gamma \geq 0}} (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$.

Exercice 11. ●◐○ – *Sommes, produits et racines*

1. Montrer que $x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que pour tout $n \geq 1$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,
$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1+x_k)\right)^{1/n}.$$
3. Montrer que pour tous $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,
$$\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n y_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (x_k + y_k)\right)^{1/n}.$$

Exercice 12. ♣ – ●●○ – *Inégalités de Hölder, Young et Minkowski*

Dans tout l'exercice, on fixe $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Montrer l'*inégalité de Young* : $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, a^{1/p} b^{1/q} \leq \dfrac{1}{p} a + \dfrac{1}{q} b$.

2. Pour tout $\ell \geq 1$ et tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\|x\|_\ell = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|^\ell \right)^{1/\ell}$.

   (a) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.
   En utilisant l'inégalité de Young, montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\, y_i \leq 1$.

   (b) En déduire *l'inégalité de Hölder* : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\, y_i \leq \|x\|_p\, \|x\|_q$.

3. Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$.

   (a) Montrer $\|x + y\|_p^p \leq \displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i|\,|x_i + y_i|^{p-1}$.

   (b) En appliquant habilement l'inégalité de Hölder, montrer *l'inégalité de Minkowski* :

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Exercice 13. ♣ – ●●◐ – *Polygone inscrit d'aire maximale*

Soit $n \geq 4$. Montrer que de tous les polygones à n côtés inscrits dans un cercle, le polygone régulier est celui d'aire maximale.

Exercice 14. ♣ – ●●● – *Inégalité de Popoviciu*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et $x, y, z \in I$. Montrer

$$\frac{2}{3}\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right) \right] \leq \frac{1}{3}\left[f(x) + f(y) + f(z) \right] + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right).$$

Indications

Exercice 1. Une fonction affine est à la fois convexe et concave.

Exercice 3. Utiliser l'inégalité des pentes.

Exercice 4. Commencer par montrer que l'inégalité de convexité est satisfaite pour tout paramètre t de la forme $\frac{p}{2^n}$, où $p \in [\![0, 2^n]\!]$.

Exercice 7. Utiliser l'inégalité des pentes pour encadrer la valeur de $f(x)$ autour d'un point x_0 fixé.

Exercice 13. On peut se ramener au cas des polygônes inscrits dans le cercle trigonométrique. Paramétrer les polygones par les arguments de leurs sommets et écrire l'aire du polygone en fonction de ces arguments.

Exercice 14. Sans perte de généralité, supposer $x \leq y \leq z$. Puis, distinguer selon que $y \leq \frac{x+y+z}{3}$ ou non.