Polynômes

1 Calculs dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 1. ○○○ – *Calcul sur les coefficients*

Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant de

$$P_n = (X+1)^{2n} + (X-1)^{2n} - 2(X^2+1)^n.$$

Exercice 2. ○○○ – *Degré de $P(X) - P(X+1)$*

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Déterminer en fonction de degré de P le degré du polynôme

$$P(X+1) - P(X).$$

Exercice 3. ●○○ – *Équations polynomiales avec la dérivée*

Résoudre dans $\mathbb{K}[X]$:

1. $P'' + P' = X^2 + 1$;
2. $P + XP' = 0$;
3. $(X^2 - X)P'' = 6P$;
4. $(P')^2 = 4P$;
5. $P - P' = X^n$, $n \in \mathbb{N}$.

2 Dérivation

Exercice 4. ◐○○ – *Valeurs prescrites des dérivées de P en un point*

Trouver les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant $P(2) = 1$, $P'(2) = 2$, $P''(2) = 4$ et $P^{(n)}(2) = 0$, pour $n \geq 3$.

Exercice 5. ♣ – ●○○ – *Division euclidienne par $(X - \alpha)^n$*

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Écrire le reste de la division euclidienne de P par $(X-\alpha)^n$, comme combinaison linéaire des polynômes $(X-\alpha)^k$, avec $k \leq n-1$.

Exercice 6. ●◐○ – *Absence de racines avec condition sur les dérivées*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $P(a) > 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)}(a) \geq 0$.
Montrer que P ne possède pas de racines dans $[a, +\infty[$.

3 Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$

Exercice 7. ♣ – ◐○○ – *Relations de Bézout*

1. Soient P et Q définis par $P = 3X^4 + 3X^3 - 4X^2 - 2X - 9$ et $Q = X^2 + X + 1$.
   Déterminer un couple (U, V) de polynômes tels que $PU + QV = 1$.

2. Soient P et Q définis par $P = 2X^4 + X^3 - X^2 - X - 1$ et $Q = X^3 + X^2 + X - 3$.
   Calculer le PGCD D de P et Q et déterminer une relation de Bézout $PU + QV = D$.

Exercice 8. ●○○ – *Divisibilité*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $P_n = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $X^2 - X + 1$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que $Q_n = X^{2n} + X^n + 1$ soit divisible par $X^2 + X + 1$.

Exercice 9. ♣ – ●○○ – *Polynômes $X^n - 1$*

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, tels que $n \geq p$.

1. Effectuer la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^p - 1$.

2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur n et p pour que $X^n - 1$ soit divisible par $X^p - 1$.

3. Calculer le PGCD de $X^n - 1$ et $X^p - 1$.

Exercice 10. ●◐○ – *$P\big(P(X)\big) - X$ est divisible par $P(X) - X$*

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(P(X)) - X$ est divisible par $P(X) - X$.

Exercice 11. ●◐○ – *Polynôme divisible par son polynôme dérivé*

On suppose que $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle. Déterminer les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que P' divise P.

Exercice 12. ●◐○ – *PGCD de la somme et du produit*

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P \wedge Q = 1$ ssi $(P+Q) \wedge PQ = 1$.

2. Quelle relation existe-t-il en général entre $P \wedge Q$ et $(P+Q) \wedge PQ$?

4 Racines

Exercice 13. ●○○ – *Rigidité des polynômes*

1. Montrer qu'il n'existe pas $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \overline{z}$.

2. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.
   Montrer qu'il n'existe pas $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in I, P(x) = \sin x$.

3. Soit $T \in \mathbb{C}^*$. Déterminer les fonctions polynomiales à coefficients complexes T-périodiques.

4. Montrer qu'il n'existe pas $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

   (a) $P(k) = \dfrac{1}{k}$; (b) $P(k) = \sqrt{k^2+1}$; (c) $P(k) = 2^k$.

Exercice 14. ♣ – ●○○ – *Liberté algébrique d'une famille de fonctions*

Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)\cos x + Q(x)\sin x = 0$.
Montrer que P et Q sont nuls.

Exercice 15. ●◐○ – *Dérivée d'un polynôme scindé dans* $\mathbb{R}[X]$

Soit P un polynôme scindé de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16. ♣ – ●●○ – *Coefficients successifs d'un polynôme scindé à racines simples*

Soit P un polynôme réel scindé à racines simples de degré ≥ 2

1. Montrer que P n'a pas deux coefficients nuls successifs.

2. Montrer que les coefficients situés de part et d'autre d'un coefficient nul de P ne sont pas de même signe.

Exercice 17. ●◐○ – *Troncature de l'exponentielle*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a pas de racines multiples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 18. ●◐○ – *Racines de* P^2+1

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples. Montrer que les racines complexes de P^2+1 sont simples.

Exercice 19. ●◐○ – *Racines et division euclidienne*

1. Déterminer un polynôme simple s'annulant en $1+\sqrt{2}$.
   En déduire la valeur en $1+\sqrt{2}$ de $P = 2X^5 - 4X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 5X - 4$.

2. Déterminer la valeur en $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ de $Q = 3X^4 + 7X^3 + X^2 - 2X + 5$.

3. Soient R et S définis par $R = X^{107} - X^3 + 1$ et $S = X^2 + 2X - 3$.
   Déterminer le reste dans la division euclidienne de R par S.

Exercice 20. ♣ – ●◐○ – *Racines et division euclidienne, avec paramètres*

1. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
   Déterminer le reste dans la division euclidienne de $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par X^2+1, puis par $(X^2+1)^2$.

2. Soient λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-\lambda)(X-\mu)$.

Exercice 21. ●◐○ – *Polynôme dans* $\mathbb{Q}[X]$ *dont* $\sqrt{2}$ *est une racine*

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\sqrt{2}) = 0$. Montrer que $P(-\sqrt{2}) = 0$.

Exercice 22. ♣ – ●●○ – *Polynômes de Legendre*

Pour tout entier naturel n, on pose $L_n = \dfrac{n!}{(2n)!}\big((X^2-1)^n\big)^{(n)}$.

1. Montrer que L_n est un polynôme unitaire de degré n.

2. Montrer que pour tout polynôme réel $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\,dt = 0$.

3. En déduire que L_n est scindé à racines simples et que ses racines sont toutes dans $]-1,1[$.

Exercice 23. ♣ – ●●◐ – *Borne de Cauchy*

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme unitaire. On note $Z(P)$ l'ensemble de ses racines complexes.

1. Montrer $\forall \zeta \in Z(P), |\zeta|^n \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\,|\zeta|^k$ et en déduire $\forall \zeta \in Z(P)\setminus\{0\}, |\zeta| \leq \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{|a_{n-1-\ell}|}{|\zeta|^\ell}$.

2. Utiliser la question précédente pour montrer
$$\forall \zeta \in Z(P), |\zeta| \leq \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right).$$

3. En réutilisant le résultat de la première question, montrer la *borne de Cauchy*
$$\forall \zeta \in Z(P), |\zeta| \leq 1 + \max\big(|a_0|, \dots, |a_{n-1}|\big).$$

5 Factorisation

Exercice 24. ●○○ – *Factorisation de* $X^n - 1$

Décomposer $X^n - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 25. ♣ – ●○○ – *Un produit de sinus*

Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = (X+1)^n - e^{2ina}$.

1. Déterminer les racines de P_n ainsi que leur multiplicité.
2. En déduire la valeur de $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 26. ♣ – ●◐○ – *Factorisations dans* $\mathbb{R}[X]$

Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants ($n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$) :

1. $X^6 + 1$;
2. $X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1$;
3. $X^4 + 2(\cos\alpha)X^2 + 1$;
4. $X^6 - 2(\cos\alpha)X^3 + 1$;
5. $X^{2n} - X^n \cos\theta + 1$.

Exercice 27. ♣ – ●●○ – *Un produit de cotangentes*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $(X+1)^n - (X-1)^n$.
2. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ l'identité $\prod_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$.

Exercice 28. ●●○ – *Polynômes de Tchebychev*

1. Montrer qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$
2. Calculer T_0 et T_1. Montrer la relation de récurrence suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} + T_n = 2XT_{n+1}.$$
   En déduire le degré et le coefficient dominant de T_n.
3. Déterminer les racines de T_n et en déduire une factorisation de T_n.

6 Relation coefficients-racines

Exercice 29. ◐○○ – *Moyenne des racines*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 2.
Montrer que les moyennes des racines de P et P' sont les mêmes (en comptant les multiplicités).

Exercice 30. ●◐○ – *Une racine somme des deux autres*

On considère le polynôme $P = X^3 + pX^2 + qX + r \in \mathbb{C}[X]$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur p, q et r pour qu'une des racines de P soit la somme des deux autres racines.

Exercice 31. ♣ – ●◐○ – *Discriminant d'un polynôme de degré* 3

Soit $q \neq 0$ et soient x_1, x_2 et x_3 les trois racines complexes de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

1. Exprimer $(x_1 - x_2)^2$ en fonction de $x_1 + x_2$ et x_1x_2. Puis en fonction de x_3, p et q.
2. En déduire l'identité $(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2 = -(4p^3 + 27q^2)$.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que le polynôme $X^3 + pX + q$ ait une racine double.

Exercice 32. ●◐○ – *Un jeu d'écriture*

Soit $P = X^3 + pX^2 + qX + r$, de racines complexes α, β et γ telles qu'aucune racine n'est l'opposée d'une autre. Exprimer en fonction de p, q et r la quantité $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma} + \dfrac{\beta}{\gamma+\alpha} + \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$.

Exercice 33. ●●○ – *Deux systèmes d'équations polynomiales*

1. Déterminer les triplets (x, y, z) de nombres complexes tels que

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xy + yz + zx = -5 \\ xyz = -6. \end{cases}$$

2. Déterminer les triplets (x, y, z) de nombres complexes tels que

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8. \end{cases}$$

Exercice 34. ●●○ – *Polynômes à coefficients entiers et racines bornées*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de polynômes unitaires à coefficients entiers dont toutes les racines complexes sont de module ≤ 1.

7 Interpolation de Lagrange

Exercice 35. ♣ – ●○○ – *Identités sur les polynômes de Lagrange*

Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note L_k l'unique polynôme de degré $\leq n$ tel que $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $L_k(x_j) = \delta_{k,j}$. Identifier $\sum_{k=0}^{n} L_k$ et $\sum_{k=0}^{n} x_k L_k$.

Exercice 36. ●◐○ – *Valeurs réelles en des réels*

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\alpha) \in \mathbb{R}$, pour une infinité de $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$.
2. Généraliser.

Exercice 37. ♣ – ●●○ – *Valeurs d'un polynôme interpolateur*

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall k \in [\![1, n+1]\!], P(k) = \dfrac{1}{k}$. Déterminer $P(0)$.

Exercice 38. ♣ – ●●◐ – *Minoration de la valeur d'un polynôme en un entier*

Soient $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ des entiers et soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n. Montrer que

$$\max_{0 \le k \le n} |P(a_k)| \ge \frac{n!}{2^n}.$$

8 En lien avec l'arithmétique/l'algèbre générale

Exercice 39. ●○○ – *Polynômes sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$*

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Justifier les assertions suivantes :

1. A divise B dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si A divise B dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Le PGCD de A et B est le même dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 40. ●◐○ – *Racines d'un irréductible de $\mathbb{Q}[X]$*

Soit P irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont simples.

Exercice 41. ●◐○ – *Racine rationnelle d'un polynôme à coefficients entiers*

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients entiers.

1. On suppose que P a une racine rationnelle $x = \dfrac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$. Montrer que q divise a_n et p divise a_0. En déduire un algorithme donnant les racines rationnelles de P.
2. Montrer que $p - q$ divise $\sum_{k=0}^{n} a_k$ et que $p + q$ divise $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.
3. En déduire que $X^3 + X^2 + X + 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 42. ♣ – ●●○ – *Infinité de valeurs non premières*

Soit P un polynôme à coefficients entiers. Montrer que si P n'est pas constant, alors il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ n'est pas premier.

Exercice 43. ♣ – ●●○ – *Contenu d'un polynôme et critère d'Eisenstein*

XXX Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients entiers. Le contenu de P est le PGCD de ses coefficients. On dit que P est primitif si son contenu est égal à 1.

1. Montrer que le produit de deux polynômes primitifs de $\mathbb{Z}[X]$ est primitif.

2. Plus généralement, montrer que le contenu du produit de deux polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ est le produit de leur contenu.

3. Si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, montrer qu'il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

4. **Critère d'Eisenstein.** On suppose qu'il existe un nombre premier p tel que

   a) p divise $a_0, \ldots, a_{n-1}$.
   b) p ne divise pas a_n.
   c) p^2 ne divise pas a_0.

   Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

5. Montrer que pour tout $n \geq 2$, le polynôme $X^n - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 44. ♣ – ●●◐ – *Polynômes cyclotomiques*

1. Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe $\Phi_p \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $X^p - 1 = (X-1)\Phi_p(X)$.

2. Calculer $\Phi_p(X+1)$ et en déduire que Φ_p est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$.

3. Écrire le polynôme $X^{2p} - 1$ comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{Q}[X]$.

4. Montrer qu'il existe $\Phi_{p^2} \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $X^{p^2} - 1 = (X-1)\Phi_p(X)\Phi_{p^2}(X)$.

   (a) Factoriser $\Phi_{p^2}(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$.
   (b) Montrer que $\Phi_{p^2}(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $X^{p^k} - 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

6. Trouver le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X^n - 1$ n'ait pas été factorisé dans $\mathbb{Q}[X]$ lors des questions précédentes, et factoriser ce polynôme.

9 Autres exercices

Exercice 45. ●◐○ – *Inégalité entre le module de deux polynômes*

Déterminer les couples $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \leq |Q(z)|$.

Exercice 46. ●◐○ – *Principe du maximum pour les polynômes*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$, $z_0, \lambda \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} P(z_0 + \lambda\omega) = P(z_0)$.

2. On suppose que la fonction $z \mapsto |P(z)|$ admet un maximum local en z_0 : il existe $r > 0$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \big(|z - z_0| \leq r\big) \implies |P(z)| \leq |P(z_0)|.$$

   Montrer que P est constant.

Exercice 47. ●●◐ – *Cercle unité envoyé dans le cercle unité*

Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $P(z) \in \mathbb{U}$.

Exercice 48. ♣ – ●●◐ – *Polynômes sommes de deux carrés*

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.
2. $\exists A, B \in \mathbb{R}[X] : P = A^2 + B^2$.

Exercice 49. ♣ – ●●◐ – *Théorèmes de Mason-Stothers et de Liouville*

Dans cet exercice, on note n_P le nombre de racines complexes d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.
Soit A, B et C trois polynômes premiers entre eux dans leur ensemble et tels que le produit ABC ne soit pas constant. Nous allons montrer que si $A+B+C=0$, alors $n_{ABC} \geq 1+\max(\deg A, \deg B, \deg C)$ (*théorème de Mason-Stothers, 1981*). On suppose dans la suite $A+B+C=0$.

1. Montrer que A, B et C sont deux à deux premiers entre eux.
2. On définit $P = AB' - A'B$.
   (a) Montrer que pour toute racine z de A, $\mu_z(P) \geq \mu_z(A) - 1$.
   (b) Montrer $\deg P \geq \deg(ABC) - (n_A + n_B + n_C)$.
3. Conclure la démonstration du théorème de Mason-Stothers.
4. **Application.** Soit $n \geq 3$. Résoudre l'équation $P^n + Q^n = R^n$, d'inconnues $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$.
   Résultat obtenu par Liouville en 1879.

Indications

Exercice 1. Développer par la formule du binôme et considérer les coefficients de plus grand degré, jusqu'à en trouver un non nul.

Exercice 3. Obtenir des informations sur le degré de P avant d'écrire ses coefficients.

Exercice 4. Formule de Taylor...

Exercice 10. $P\big(P(X)\big) - X = P\big(P(X)\big) - P(X) + P(X) - X$.

Exercice 14. Montrer que P et Q ont une infinité de racines.

Exercice 16. Utiliser que si P est réel scindé à racines simples, alors P' aussi.

Exercice 19. Pour obtenir les valeurs dans 1. et 2., faites une division euclidienne. Faites le contraire dans 3. en considérant les racines de S.

Exercice 21. Considérer les parties paire et impaire de P.

Exercice 22. Pour 2., utiliser plusieurs intégrations par parties. Pour 3., une possibilité est d'énoncer et localiser par récurrence les racines de $\big((X^2-1)^n\big)^{(k)}$, pour $k \in [\![0, n]\!]$.

Exercice 30. Déterminer une quantité symétrique en les racines, nulle ssi l'une des racines est la somme des deux autres. Puis utiliser les formules de Viète.

Exercice 34. Donner une majoration des coefficients de ces polynômes.

Exercice 36. Par interpolation de Lagrange, un polynôme de degré n est entièrement connu par sa valeur en $n+1$ points.

Exercice 38. Commencer par écrire P en fonction des $P(a_k)$. Puis utiliser le fait que P est unitaire.

Exercice 48. Pour le sens difficile, on peut passer par une factorisation dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.