DM 14 - Interpolation polynomiale

Les deux problèmes sont indépendants.

1 Approximation polynomiale par interpolation

Étant donnée une fonction f définie sur un segment, on peut construire un polynôme ayant les mêmes valeurs que f en n points donnés : on parle de *polynôme interpolateur*. Dans ce problème, on étudie à quel point ces polynômes interpolateurs donnent une bonne approximation de la fonction f quand le nombre de points d'interpolation augmente.

1.1 Estimation fondamentale

Soit f une fonction définie sur un segment $[a,b]$; soit $\underline{x} = (x_0,\dots,x_n)$ un $(n+1)$-uplet de points distincts dans $[a,b]$. On note $L_{f,\underline{x}}$ l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall j \in [\![0,n]\!], L_{f,\underline{x}}(x_j) = f(x_j).$$

C'est le polynôme interpolateur de la fonction f, en les points d'interpolation de $\underline{x}$.
Si g est une fonction continue sur un segment $[a,b]$, on note $\|g\|_\infty = \sup\left\{|g(x)|, x \in [a,b]\right\}$.
On note aussi $P_{\underline{x}}$ l'application polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $P_{\underline{x}} : x \mapsto \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

1. Soit u un point de $[a,b]$ distinct des x_i.
   Montrer qu'il existe une constante K_u telle que la fonction g donnée par

   $$g : x \mapsto f(x) - L_{f,\underline{x}}(x) - K_u \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

   s'annule en $x_0,\dots,x_n$ et en u.

2. On suppose maintenant f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.
   Montrer qu'il existe un réel $c_u \in [a,b]$ tel que $g^{(n+1)}(c_u) = 0$.

3. En déduire l'identité suivante :

   $$f(u) - L_{f,\underline{x}}(u) = \frac{f^{(n+1)}(c_u)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(u - x_i).$$

4. En déduire la majoration suivante :

   $$\|f - L_{f,\underline{x}}\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}\|P_{\underline{x}}\|_\infty.$$

1.2 Phénomène de Runge

On se place sur un segment $[a,b]$. On fixe un entier n et on considère le $(n+1)$-uplet $\underline{x} = (x_0,\dots,x_n)$ donné par $\forall k \in [\![0,n]\!], x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

5. Montrer la majoration
$$\|P_{\underline{x}}\|_\infty \le \frac{n!}{4}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}.$$

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur le segment $[a,b]$.
On dit que f a une *croissance raisonnable* s'il existe deux constantes $C>0$ et $r \ge b-a$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f^{(n)}\|_\infty \le C\frac{n!}{r^n}.$$

6. Montrer que la fonction exp a une croissance raisonnable sur tout segment $[a,b]$.

7. On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur le segment $[0,5]$.

   a) Déterminer les valeurs des dérivées successives de g en 0.

   b) En déduire que g n'a pas une croissance raisonnable sur le segment $[0,5]$.

8. On suppose que f a une croissance raisonnable sur le segment $[a,b]$. Montrer qu'il existe une constante $C>0$ telle que :
$$\|f - L_{f,\underline{x}}\|_\infty \le C\frac{n!}{n^n}.$$

9. En déduire que si f a une croissance raisonnable sur le segment $[a,b]$, alors $\|f - L_{f,\underline{x}}\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.[1]

1.3 Interpolation en les nœuds de Tchebychev

Dans la section précédente, on a utilisé des points espacés de façon régulière pour faire l'interpolation. Dans cette section, on montre qu'on dispose d'un meilleur choix.
La question suivante a été traitée en exercice et ne sera pas corrigée.

10. a) Montrer qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$
    Préciser le degré et le coefficient dominant de T_n.

    b) Calculer T_0 et T_1. Montrer la relation de récurrence suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N} : T_{n+2} + T_n = 2XT_{n+1}.$$

    c) Déterminer les racines de T_n et en déduire une factorisation de T_n.

[1] Avec plus de travail, on pourrait montrer que, pour la fonction g définie plus haut, $\|g - L_{g,\underline{x}}\|_\infty$ tend vers $+\infty$ avec n. De façon paradoxale, l'écart entre la fonction et son polynôme d'interpolation tend vers l'infini quand on augmente le nombre de points d'interpolation. C'est le *phénomène de Runge*.

On se place sur le segment $[a,b]=[-1,1]$. On note encore T_n pour la restriction de l'application à $[-1,1]$ de l'application polynomiale associée à T_n.

11. Montrer que $\|T_n\|_\infty = 1$. Montrer qu'il existe exactement $n+1$ points

$$-1 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = 1$$

en lesquels T_n vaut ± 1. Préciser la valeur de $T_n(y_k)$.

12. Soit P un polynôme unitaire de degré n. En considérant le polynôme $Q = P - \dfrac{T_n}{2^{n-1}}$ et les valeurs de Q en les points y_k, montrer que[2]

$$\|P\|_\infty \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

2 Une inégalité d'interpolation

Dans ce problème, on fixe $K \in \mathbb{N}^*$, $x_1 < \cdots < x_k$ dans $[0,1]$. On cherche à montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall f \in \mathscr{C}^K\big([0,1]\big), \max_{0\leq k\leq K-1} \|f^{(k)}\|_\infty \leq \|f^{(K)}\|_\infty + C\sum_{i=1}^{K} |f(x_i)|.$$

La notation $\|\cdot\|_\infty$ est définie comme dans le problème précédent, le segment $[0,1]$ étant sous-entendu.

2.1 Le cas des polynômes

Si $P = \sum_{k=0}^{K-1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{K-1}[X]$, on note $M(P) = \max_{0\leq k\leq K-1} |a_k|$.

1. On souhaite montrer qu'il existe $A > 0$ telle que $\forall P \in \mathbb{R}_{K-1}[X], M(P) \leq A\sum_{i=1}^{K} |P(x_i)|$. On suppose par l'absurde qu'il n'existe pas de tel A.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}_{K-1}[X]$ tel que $M(P_n) = 1$ et $\sum_{i=1}^{K} |P_n(x_i)| \leq \dfrac{1}{n}$.

   On dit qu'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ converge vers un polynôme $P \in \mathbb{R}_{K-1}[X]$ si la convergence a lieu coefficient par coefficient.

   (b) Montrer qu'il existe une extractrice $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\big(P_{\phi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un polynôme $P_\infty \in \mathbb{R}_{K-1}[X]$.

   (c) Montrer que P_∞ vérifie $M(P_\infty) = 1$ et $\sum_{i=1}^{K} |P_\infty(x_i)| = 0$. Conclure.

---

[2] Ceci montre que, parmi les polynômes unitaires P de degré n, $\dfrac{T_n}{2^{n-1}}$ est le seul minimisant $\|P\|_\infty$ sur $[-1,1]$. Au vu de la question 4, ceci justifie d'utiliser les racines de T_n pour obtenir une bonne interpolation polynomiale.

2. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{K-1}[X], \max_{0 \leq k \leq K-1} \|P^{(k)}\|_\infty \leq C \sum_{i=1}^{K} |P(x_i)|.$$

3. Rappeler la formule exprimant $P \in \mathbb{R}_{K-1}[X]$ en fonction des $P(x_i)$.
   En déduire une autre démonstration du résultat de la question précédente.

2.2 Conclusion par interpolation de Lagrange

On fixe $f \in \mathscr{C}^K\big([0,1]\big)$ et on note $P \in \mathbb{R}_{K-1}[X]$ son polynome d'interpolation en les points $x_1, \ldots, x_K$.

4. Pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$, montrer que la fonction $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule en au moins $K - k$ points distincts sur $[0,1]$.

5. En déduire que $\forall k \in [\![0, K-1]\!], \|f^{(k)} - P^{(k)}\|_\infty \leq \|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\|_\infty$.

6. Conclure.