Algèbre linéaire - Théorie générale

1 Espaces et sous-espaces vectoriels

Exercice 1. ○○○ – *Sous-espaces de* $\mathbb{R}^3$

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

1. $E_1 = \left\{(\alpha, 0, \alpha + 2\beta) \in \mathbb{R}^3, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$
2. $E_2 = \left\{(\alpha + 1, \alpha, -\alpha) \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}\right\}$
3. $E_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\right\}$
4. $E_4 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 2z\right\}$
5. $E_5 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$

Exercice 2. ○○○ – *Combinaisons linéaires dans* $\mathbb{R}^3$

Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u_1 = (-3, 1, 2)$, $u_2 = (4, -2, 1)$ et $u_3 = (-5, 1, 7)$.

1. Le vecteur $v = (1, 1, -3)$ est-il combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3 ?
2. Montrer que $\mathrm{Vect}(u_3) \subset \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et que l'inclusion est stricte.

Exercice 3. ◐○○ – *Sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

1. l'ensemble des suites croissantes ;
2. l'ensemble des suites monotones ;
3. l'ensemble des suites minorées ;
4. l'ensemble des suites bornées ;
5. l'ensemble des suites convergentes ;
6. l'ensemble des suites divergentes ;
7. l'ensemble des suites convergeant vers 0 ;
8. l'ensemble des suites convergeant vers 1 ;
9. l'ensemble des suites constantes ;
10. l'ensemble des suites stationnaires ;
11. l'ensemble des suites 12-périodiques ;
12. l'ensemble des suites périodiques.

Exercice 4. ◐○○ – *Fonctions à croissance au plus linéaire*

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\exists A \in \mathbb{R}_+, \exists a \in \mathbb{R} : \forall x \geq A, |f(x)| \leq A|x|$.
Montrer que E est un espace vectoriel.

Exercice 5. ♣ – ●○○ – *Espace de fonctions sinusoïdales*

Montrer que l'ensemble $E = \left\{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists (A, \phi) \in \mathbb{R}^2 : \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = A\cos(t + \phi)\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 6. ●○○ – *Complémentaire d'un sous-espace vectoriel*

Soit E un espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriel strict de E. Déterminer $\mathrm{Vect}(E-F)$.

Exercice 7. ♣ – ●●◐ – *Espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p$*

Soit $(A,+)$ un groupe abélien, soit p un nombre premier.

1. Montrer qu'il existe au plus une loi $\cdot : \mathbb{Q}\times A \to A$ telle que $(A,+,\cdot)$ soit un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
2. A quelle condition existe-t-il une telle loi ?
3. Mêmes questions en remplaçant $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{F}_p$.

2 Applications linéaires

Exercice 8. ◐○○ – *Applications linéaires ?*

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $\left\{\begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto xy \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto (x,xy,x-z) \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto (x+y,2x+5z) \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto (x-3y,x+y,z+2) \end{array}\right.$
5. $\left\{\begin{array}{ll} \mathbb{R}[X] & \to \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto P'-P^2 \end{array}\right.$
6. $\left\{\begin{array}{ll} \mathbb{R}[X] & \to \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto P(X+1) \end{array}\right.$
7. $\left\{\begin{array}{ll} \{\text{suites convergentes}\} & \to \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto \lim_n u_n \end{array}\right.$
8. $\left\{\begin{array}{ll} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto M^T \end{array}\right.$

Exercice 9. ♣ – ◐○○ – *Noyau et image de $g\circ f$*

Soient E, F et G des espaces vectoriels, $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $g\in\mathcal{L}(F,G)$. Montrer que

1. $\mathrm{Ker}(g\circ f) = f^{-1}(\mathrm{Ker}\, g)$;
2. $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}(g\circ f)$;
3. $\mathrm{Im}(g\circ f)\subset \mathrm{Im}\, g$.

Exercice 10. ♣ – ●○○ – *Produit nul de deux formes linéaires*

Soient f et g deux formes linéaires sur un espace vectoriel E. On suppose que pour tout x de E, $f(x)g(x)=0$. Montrer que $f=0$ ou $g=0$.

Exercice 11. ●○○ – $\mathrm{Ker}(g\circ f) = \mathrm{Ker}\, f$

Soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer l'équivalence entre

1. $\mathrm{Ker}(g\circ f) = \mathrm{Ker}\, f$
2. $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, g$ sont en somme directe.

Exercice 12. ●○○ – *Dérivée discrète sur* $\mathbb{K}[X]$

Soit Δ défini de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$ par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.
Montrer que Δ est une application linéaire et donner son noyau et son image.

Exercice 13. ●○○ – *Endomorphismes qui commutent*

Soit E un espace vectoriel, soient f et g deux endomorphimes de E qui commutent.
Montrer que $g(\operatorname{Ker} f) \subset \operatorname{Ker} f$ et $g(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Im} f$.

Exercice 14. ♣ – ●○○ – *Caractérisation des homothéties*

Soit E un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K} : f(x) = \lambda_x x$. Montrer que f est une homothétie : $\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x$.

Exercice 15. ●◐○ – *Un automorphisme de* $\mathbb{K}[X]$

Soit ϕ définie de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même, par $\phi(P) = P + P'$. Montrer que ϕ est un automorphisme.

Exercice 16. ♣ – ●◐○ – *Sous-espaces propres d'un endomorphisme*

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
On note $E_\lambda(f) = \{x \in E : f(x) = \lambda x\}$.

1. Montrer que $E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soient $\lambda \neq \mu$ dans $\mathbb{K}$. Montrer que $E_\lambda(f)$ et $E_\mu(f)$ sont en somme directe dans E.
3. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$. Montrer que les $E_{\lambda_k}(f)$ sont en somme directe.
4. On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$, où $n \geq 1$. Soit $f : E \to E$ tel que $f(P) = XP'$.
   Montrer que f est un endomorphisme, puis calculer $E_\lambda(f)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 17. ♣ – ●◐○ – *Inverse à gauche, inverse à droite*

Soient E et F deux espaces vectoriels, soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. On suppose que u est injective et que $\operatorname{Im} u$ a un supplémentaire dans F.
   Montrer l'existence de $v \in \mathscr{L}(F,E)$ tel que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.
2. On suppose que u est surjective et que $\operatorname{Ker} u$ a un supplémentaire dans E.
   Montrer l'existence de $v \in \mathscr{L}(F,E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$.

Exercice 18. ●◐○ – *Shift sur* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, soit S l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, défini par $S\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Vérifier que S est linéaire. Déterminer $\operatorname{Ker} S$ et $\operatorname{Im} S$.
2. Montrer que $\big(\operatorname{Ker}(S^k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de ssev de E. Que vaut $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}(S^k)$?
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\operatorname{Ker}(S^p - \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 19. ♣ – ●◐○ – $u(u^{-1}(F))$ *et* $u^{-1}(u(F))$

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E, soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Exprimer $u^{-1}\big(u(F)\big)$ en fonction de F et de $\operatorname{Ker} u$.
2. Exprimer $u\big(u^{-1}(F)\big)$ en fonction de F et de $\operatorname{Im} u$.
3. Quand a-t-on $u\big(u^{-1}(F)\big) = u^{-1}\big(u(F)\big)$?

3 Sommes et supplémentaires

Exercice 20. ●○○ – *Somme et somme directe*

Soit E un espace vectoriel, soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F + G$. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrer que $E = F' \oplus G$.

Exercice 21. ●◐○ – *Fonctions* $\mathscr{C}^\infty$, 2π*-périodiques*

On considère E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et 2π-périodiques.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. On considère $D \in \mathscr{L}(E)$ défini par $D(f) = f''$.
   Vérifier que D est bien défini et montrer que $E = \operatorname{Ker}(D) \oplus \operatorname{Im}(D)$.

Exercice 22. ●◐○ – *Supplémentaires dans* $\mathscr{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$

On considère E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ et les trois sous-espaces vectoriels suivants :

- $F_1 = \{f \in E \mid f \text{ constante}\}$
- $F_2 = \{f \in E \mid f_{|[-1,0]} \equiv 0\}$
- $F_3 = \{f \in E \mid f_{|[0,1]} \equiv 0\}$.

Montrer que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Exercice 23. ♣ – ●◐○ – *Supplémentaires dans* $\mathbb{R}[X]$

Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels distincts. Montrer que $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall k \in [\![0,n]\!], P(\alpha_k) = 0\}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}[X]$.
Identifier la projection sur $\mathbb{R}_n[X]$ correspondante.

Exercice 24. ●◐○ – *Supplémentaires dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Soient E, F et G les trois sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$E = \big\{(u_n)_{n\geq 0},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0\big\}.$$
$$F = \big\{(u_n)_{n\geq 0},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + u_n = 0\big\}.$$
$$G = \big\{(u_n)_{n\geq 0},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0\big\}.$$

1. Montrer que E, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E.

Exercice 25. ●◐○ – *Supplémentaires dans* $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble $\mathscr{F} = \left\{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. En donner un supplémentaire.

Exercice 26. ♣ – ●●◐ – *Lemme des noyaux, cas quadratique*

Soit E un espace vectoriel, $\alpha \neq \beta$ deux scalaires et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $(f - \alpha\,\mathrm{Id}_E)\circ(f-\beta\,\mathrm{Id}_E) = 0$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $a(f-\alpha\,\mathrm{Id}_E) + b(f-\beta\,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_E$.
2. En déduire que $E = \mathrm{Im}(f-\alpha\,\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Im}(f-\beta\,\mathrm{Id}_E)$.
3. En déduire que $\mathrm{Im}(f-\beta\,\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f-\alpha\,\mathrm{Id}_E)$ et que $\mathrm{Im}(f-\alpha\,\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f-\beta\,\mathrm{Id}_E)$.
4. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f-\alpha\,\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f-\beta\,\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 27. ♣ – ●●◐ – *Théorème de Maschke*

Soit K un corps de caractéristique nulle, E un K-espace vectoriel et G un sous-groupe fini de $GL(E)$. On considère un sous-espace vectoriel F de E, *stable par* G (c'est-à-dire tel que $\forall g \in G, g(F) \subset F$) et un projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ dont l'image est F. On pose enfin $\pi = \dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}\circ p \circ g$.

1. Montrer que π est un projecteur d'image F, et que $\forall h \in G, \pi\circ h = h \circ \pi$.
2. En déduire que F a un supplémentaire stable par G.

4 Projecteurs et symétries

Exercice 28. ◐○○ – *Calcul d'un projecteur*

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère P l'ensemble des vecteurs (x,y,z) tels que $x-y+z=0$ et D le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(1,3,1)$.
Montrer que P et D sont supplémentaires et exprimer la projection π sur P parallèlement à D.

Exercice 29. ●○○ – *Noyau et image supplémentaires*

Un endomorphisme f d'un espace vectoriel E, tel que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$, est-il nécessairement un projecteur de E ?

Exercice 30. ♣ – ●○○ – *Projecteurs de même noyau*

Soient p et q deux endomorphismes d'un espace vectoriel E. Montrer l'équivalence entre

1. p et q projecteurs de même noyau ;
2. $p\circ q = p$ et $q \circ p = q$.

Exercice 31. ●○○ – $\mathrm{Id}_E + p$

Soit p un projecteur de E. Montrer que $\mathrm{Id}_E + p$ est un automorphisme de E et donner son inverse.

Exercice 32. ♣ – ●◐○ – *Projecteurs et supplémentaires*

1. Soit $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ la décomposition d'un espace vectoriel en somme de n sous-espaces supplémentaires. On note p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{k \neq i} E_k$.
   Montrer que si $i \neq j$, alors $p_i \circ p_j = 0$ et que $p_1 + \cdots + p_n = \mathrm{Id}_E$.

2. Réciproquement, on suppose qu'on dispose de n projecteurs $p_1, \ldots, p_n$ tels que $i \neq j \implies p_i \circ p_j = 0$ et $p_1 + \cdots + p_n = \mathrm{Id}_E$. On note E_i l'image de p_i.
   Montrer qu'on a $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.

Exercice 33. ●◐○ – *Projecteur dans* $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Soit E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère $T : E \to E$, défini par

$$\forall f \in E, T(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \big(f(1) - f(0)\big)x + f(0).$$

Montrer que T est un endomorphisme de E, puis que c'est un projecteur.
Sur quel espace projette-t-on ?

Exercice 34. ♣ – ●●○ – *Somme de deux projecteurs*

Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si $pq + qp = 0$.

On suppose cette condition vérifiée par la suite.

2. Montrer que $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, q$ et que $\mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Ker}\, p$.

3. Montrer que $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}\, q \oplus (\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q)$.

4. Montrer que $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q \oplus (\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q)$.

5. En déduire que $p + q$ est la projection sur $\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$.

5 Familles de vecteurs

Exercice 35. ◐○○ – *Famille libre dans* $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 3, -3)$ et $v_3 = (-3, -1, \alpha)$, où α est un paramètre réel. A quelle condition sur α la famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Exercice 36. ●○○ – *Une condition de liaison*

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E, soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. On pose $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u_k = u + e_k$. Montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée ssi $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = -1$.

Exercice 37. ♣ – ●○○ – *Familles libres*

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E.
Montrer que $(e_1+e_2, e_2+e_3, \dots, e_{n-1}+e_n, e_n+e_1)$ est libre.

Exercice 38. ●○○ – *Coordonnées dans* $\mathbb{K}_2[X]$

Déterminer si les familles suivantes sont des bases de $\mathbb{K}_2[X]$ et, le cas échéant, déterminer les coordonnées de X^2+X+1 dans cette base.

1. $\big(1, X-1, (X-1)^2\big)$;
2. $\big(X^2+X, X^2+1, X+1\big)$;
3. $\big((X-1)^2, X^2, (X+1)^2\big)$.

Exercice 39. ●◐○ – *Suites géométriques*

Pour tout $\theta \in \mathbb{C}^*$, on note u_θ la suite de terme général θ^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que la famille $(u_\theta)_{\theta\in\mathbb{C}^*}$ est libre dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 40. ♣ – ●◐○ – *Espace de fonctions trigonométriques*

1. Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, montrer que les familles de fonctions $t \mapsto \cos(nt)$ et $x \mapsto \cos^n(t)$, pour n dans $\mathbb{N}$, engendrent le même espace vectoriel.
2. Montrer que la famille $\big(t \mapsto \cos(nt)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de cet espace vectoriel.

Exercice 41. ●◐○ – *Fonctions* $x \mapsto |x-a|$

Pour tout réel α, on pose f_α la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f_\alpha : x \mapsto |x-\alpha|$.
Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 42. ♣ – ●●○ – *Une famille de polynômes*

Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on considère les polynômes $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

1. Montrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.
2. Montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 43. ♣ – ●●○ – *Liberté d'une famille de fonctions*

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que la famille $(f, f\circ f, f\circ f\circ f)$ est une famille libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
2. Même question avec $f = \sin$, définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 44. ♣ – ●●○ – *Théorème de la base téléscopique*

Soient $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{M}$ trois corps.

1. Montrer que $\mathbb{L}$ peut être naturellement considéré comme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

De même, $\mathbb{M}$ est un $\mathbb{L}$-espace vectoriel, et aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2. On suppose que $(e_i)_{i\in I}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{L}$ et que $(f_j)_{j\in J}$ est une base du $\mathbb{L}$-espace vectoriel $\mathbb{M}$. Montrer que la famille $(e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{M}$.

Exercice 45. ♣ – ●●○ – *Liberté sur* $\mathbb{Q}$

Dans cet exercice, on considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

1. Montrer que la famille $(\ln p)_{p\in\mathbb{P}}$ est $\mathbb{Q}$-libre.
2. Montrer que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est $\mathbb{Q}$-libre.

Indications

Exercice 5. Si vous êtes malhabile en trigonométrie, passez en complexe.

Exercice 6. Ceci n'utilise en fait que la structure de groupe additif sous-jacente.

Exercice 10. Raisonner par l'absurde et utiliser la linéarité sur la somme de deux éléments bien choisis.

Exercice 12. Pour l'image, on peut raisonner sur les coefficients et montrer qu'un certain système a toujours une solution.

Exercice 14. Comparer λ_x, λ_y et λ_{x+y}.

Exercice 23. Les outils sont dans la grange.

Exercice 28. Revenir à la définition, en écrivant un vecteur de $\mathbb{R}^3$ comme somme d'un élément de P et d'un élément de D.

Exercice 37. Exploiter les symétries du système correspondant.

Exercice 40. Linéariser, délinéariser.

Exercice 41. Comment peut-on retrouver les différents points a dans une combinaison linéaire de telles fonctions ?

Exercice 43. Faire une comparaison asymptotique des trois fonctions.