DM 14 - Interpolation polynomiale

1 Interpolation polynomiale

1.1 Estimation fondamentale

1. Remarquons déjà que g s'annule en les x_i quelle que soit la valeur de u, car pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $f(x_i) = L_{f,\underline{x}}(x_i)$. On a $g(u) = 0 \iff f(u) - L_{f,\underline{x}}(u) - K_u \prod_{i=0}^{n}(u - x_i) = 0$. Une seule valeur de K_u convient :
$$K_u = \frac{f(u) - L_{f,\underline{x}}(u)}{\prod_{i=0}^{n}(u - x_i)}.$$

2. La fonction g s'annule en $n+2$ points distincts sur $[a,b]$. Par application du théorème de Rolle entre deux points consécutifs d'annulation de g, on en déduit que g' a $n+1$ points d'annulation distincts sur $[a,b]$. Par une récurrence finie rapide, on montre que $g^{(k)}$ s'annule $n+2-k$ fois sur $[a,b]$, pour $k \in [\![0,n+1]\!]$. En particulier, $g^{(n+1)}$ s'annule sur $[a,b]$.

3. $L_{f,\underline{x}}$ est un polynôme de degré n donc sa dérivée $(n+1)$-ème s'annule. La dérivée $(n+1)$-ème de $x \mapsto \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ est $(n+1)!$ car c'est une application polynomiale unitaire de degré $n+1$. Donc, pour tout $x \in [a,b]$:
$$g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - K_u(n+1)!.$$
En appliquant à $x = c_u$ et en utilisant l'expression trouvée pour K_u en question 1, on trouve donc :
$$0 = f^{(n+1)}(c_u) - \frac{f(u) - L_{f,\underline{x}}(u)}{\prod_{i=0}^{n}(u - x_i)} \times (n+1)!,$$
ce qui donne l'égalité souhaitée.

4. Soit $x \in [a,b]$. On a :
$$|f(x) - L_{f,\underline{x}}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \right| = \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1!)} |P_{\underline{x}}(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \|P_{\underline{x}}\|_\infty.$$
Comme l'inégalité est vraie pour tout $x \in [a,b]$, on peut passer à la borne supérieure à gauche et ainsi obtenir :
$$\|f - L_{f,\underline{x}}\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \|P_{\underline{x}}\|_\infty.$$

1.2 Phénomène de Runge

5. Soit $x \in [a,b]$. On a $P_{\underline{x}}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$. Notons $k \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $x_k \leq x \leq x_{k+1}$. Pour tout $i < k$, on a : $|x - x_i| = x - x_i \leq (k - i + 1)\dfrac{b-a}{n}$ et pour tout $j > k+1$, on a

$|x-x_j| = x_j - x \leq (j-k)\dfrac{b-a}{n}$. De plus, le produit $|(x-x_k)(x-x_{k+1})| = (x-x_k)(x_{k+1}-x)$ est maximal (pour $x \in [x_k, x_{k+1}]$ en le milieu $x = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$ et il vaut $\left(\dfrac{b-a}{2n}\right)^2$. On en déduit que :

$$|P_{\underline{x}}(x)| \leq \prod_{i=0}^{k-1}(k-i+1)\left(\frac{b-a}{n}\right) \times \left(\frac{b-a}{2n}\right)^2 \times \prod_{j=k+2}^{n}(j-k)\frac{b-a}{n} = \frac{1}{4}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}(k+1)!(n-k)!.$$

Il s'agit donc de montrer que $(k+1)!(n-k)! \leq n!$ si $k \in [\![0, n-1]\!]$. Or $\dfrac{(k+1)!(n-k)!}{n!} = \dfrac{n+1}{\binom{n+1}{k+1}} \leq 1$

(en dehors des termes extrêmes valant 1*, les plus petits coefficients binomiaux* $\dbinom{p}{k}$ *sont obtenus pour* $k=1$ *ou* $k=p-1$*).*

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)} = \exp$. Comme exp est croissante et positive sur $\mathbb{R}$, $\|\exp^{(n)}\|_\infty = \exp(b)$ est indépendante de n. Fixons $r \geq b-a$. Par croissance comparée, on sait que $\dfrac{n!}{r^n}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(b) \leq C\dfrac{n!}{r^n}$. Ce qui conclut.

   C est un majorant de la suite $\dfrac{\exp(b) r^n}{n!}$*, qui tend vers* 0.

7. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{x-i} - \dfrac{1}{x+i}\right)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc :

   $$g^{(n)}(x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}}\right).$$

   On évalue en 0 : $g^{(n)}(0) = \dfrac{n!}{2i(i^{n+1})}(-1+(-1)^{n+1})$. Après simplifications, on trouve que

   $$g^{(n)}(0) = 0 \text{ si } n \text{ est impair et } g^{(n)}(0) = n!(-1)^{n/2} \text{ si } n \text{ est pair.}$$

   b) On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|g^{(2n)}\|_\infty \geq |g^{(2n)}(0)| = (2n)!$. Si g avait une croissance raisonnable sur $[0,5]$, on trouverait donc un $r \geq 5$ et un $C > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$:

   $$(2n)! \leq C\frac{(2n)!}{r^{2n}}.$$

   Mais comme $r \geq 5 > 1$, $r^{2n} \to +\infty$ et c'est absurde. Donc g n'a pas une croissance raisonnable.

   Le segment $[0,1]$ *aurait suffi pour cette preuve, mais le segment doit être plus grand si on veut montrer comme il est dit en note de bas de page que, pour cette fonction, l'erreur entre polynômes d'interpolation et g tend vers l'infini quand le nombre de points d'interpolation tend vers l'infini.*

8. Soit $C > 0$, soit $r \geq b-a$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \|f^{(n)}\|_\infty \leq C\dfrac{n!}{r^n}$. Par les questions 4 et 5, on a alors :

   $$\|f - L_{f,\underline{x}}\|_\infty \leq \frac{C}{(n+1)!} \times \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} \times \frac{n!}{4}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}.$$

   Comme $r \geq b-a$, on a :

   $$\|f - L_{f,\underline{x}}\|_\infty \leq \frac{C}{4}\frac{n!}{n^{n+1}} \leq C\frac{n!}{n^n}.$$

9. Par croissance comparée, on sait que le membre de droite dans l'inégalité précédente tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$. Donc si f a une croissance raisonnable sur $[a,b]$, l'écart $\|f - L_{f,\underline{x}}\|_\infty$ tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$.

1.3 Interpolation en les nœuds de Tchebychev

10. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Commençons par l'unicité. Si on a deux tels polynômes T_n et $\tilde{T}_n$, alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $(T_n - \tilde{T}_n)(\cos\theta) = \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = 0$. Donc $T_n - \tilde{T}_n$ a pour racine tout réel de la forme $\cos\theta$, c'est-à-dire tout réel de $[-1,1]$. Donc $T_n - \tilde{T}_n = 0$, ce qui conclut la preuve d'unicité.

    Pour l'existence, on passe en complexe. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) &= \mathrm{Re}(e^{in\theta}) \\
&= \mathrm{Re}\Big(\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)^n\Big) \\
&= \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta)\, i^k \sin^k(\theta)\Big) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2\ell} \cos^{n-2\ell}(\theta)(-1)^\ell \sin^{2\ell}(\theta) \\
\cos(n\theta) &= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2\ell} \cos^{n-2\ell}(\theta)(-1)^\ell (1-\cos^2)^\ell(\theta)
\end{aligned}$$

    Ainsi, en posant $T_n = \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{2\ell} X^{n-2\ell}(1-X^2)^\ell$, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

    Chaque polynôme $X^{n-2\ell}(1-X^2)^\ell$ est de degré n et de coefficient dominant $(-1)^\ell$ (*développer le deuxième facteur par binôme de Newton*). Donc T_n est de degré au plus n et le coefficient devant X^n est donné par :

$$\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^\ell \times (-1)^\ell \binom{n}{2\ell} = \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2\ell}.$$

    Or, on sait que, pour $n \geq 1$, la somme des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ pair (ou impair) vaut 2^{n-1} (*résultat montré par calcul ou de façon combinatoire*). Donc, T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} (sauf pour $n = 0$, où $T_0 = 1$).

    b) On a $T_0 = 1$ et $T_1 = X$. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $\theta \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$\begin{aligned}
T_{n+2}(\cos\theta) + T_n(\cos\theta) &= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) \\
&= \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \sin((n+1)\theta)\sin(\theta) \\
&+ \cos((n+1)\theta)\cos(-\theta)) - \sin((n+1)\theta)\sin(-\theta) \\
&= 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta) \\
&= \Big(2XT_{n+1}\Big)(\cos\theta).
\end{aligned}$$

    Ainsi, les valeurs de $T_{n+2} + T_n$ et $2XT_{n+1}$ sont les mêmes en tout $\cos\theta$, c'est-à-dire sur $[-1,1]$. Donc $T_{n+2} + T_n = 2XT_{n+1}$.

c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$T_n(\cos\theta) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2n}[\pi/n].$$

Ceci montre que, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, les $x_k = \cos\big(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\big)$ sont des racines de T_n. Ces racines sont distinctes car cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$ et que les angles $\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ sont dans $[0,\pi]$. On a ainsi trouvé les n racines de T_n. Donc,

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right).$$

11. Soit $x \in [-1,1]$. On peut trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos\theta$. Alors $T_n(x) = \cos(n\theta)$ et donc $|T_n(x)| \leq 1$. Ainsi, $\|T_n\|_\infty \leq 1$.

Avec les mêmes notations, on aura

$$|T_n(x)| = 1 \iff \cos(n\theta) = \pm 1 \iff n\theta \equiv 0[\pi] \iff \theta \equiv 0[\pi/n].$$

Ainsi, $T_n(x) = \pm 1$ ssi x est égal à l'un des $y_k = \cos((n-k)\pi/n)$, où $k \in [\![0, n]\!]$. *On utilise ces notations pour se conformer à l'énoncé.*

Par décroissance de cos sur $[0,\pi]$, on a alors :

$$-1 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = 1.$$

Enfin, $T_n(y_k) = \cos\big(n \times (n-k)\pi/n\big) = \cos\big((n-k)\pi\big) = (-1)^{n-k}$.

12. On suppose par l'absurde que $\|P\|_\infty < \frac{1}{2^{n-1}}$. On a donc, pour tout $x \in [-1,1]$, $|P(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$.

Posons $Q = P - \frac{T_n}{2^{n-1}}$. Comme P et $\frac{T_n}{2^{n-1}}$ sont unitaires de degré n, $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a $Q(y_k) = P(y_k) - \frac{T_n(y_k)}{2^{n-1}} = P(y_k) + \frac{(-1)^{n-k+1}}{2^{n-1}}$. Si $n-k+1$ est pair, on en déduit que $Q(y_k) > 0$ (car $P(y_k) > \frac{-1}{2^{n-1}}$). De même, si $n-k+1$ est impair, on a $Q(y_k) < 0$.

Ainsi, Q prend des valeurs alternativement strictement négatives et strictement positives en les y_k. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, Q a une racine sur chaque intervalle $[y_k, y_{k+1}]$, pour $k \in [\![0, n]\!]$. Comme Q est de degré $\leq n-1$ et qu'il a au moins n racines, Q est nul. Donc $P = \frac{T_n}{2^{n-1}}$, ce qui contredit l'hypothèse $\|P\|_\infty < \frac{1}{2^{n-1}}$.

On conclut finalement que $\|P\|_\infty \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ (*et la preuve montre que le seul polynôme unitaire de degré n réalisant l'égalité est* $\frac{T_n}{2^{n-1}}$).

2 Une inégalité d'interpolation

2.1 Le cas des polynômes

1. (a) Par hypothèse, on peut trouver pour tout $n \in \mathbb{N}$, un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{K-1}[X]$ tel que $M(P_n) > n \sum_{i=1}^{K} |P_n(x_i)|$. Quitte à diviser P_n par $M(P_n)$ (ce qui ne modifie pas l'inégalité),

on peut supposer que $M(P_n)=1$ et alors $\sum_{i=1}^{K}|P_n(x_i)|<\frac{1}{n}$.

(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $i\in[\![0,K-1]\!]$, on a $|a_{n,k}|\leq 1$ (en notant $a_{n,k}$ le k-ème coefficient de P_n). Donc, pour tout $k\in[\![0,K-1]\!]$, la suite $(a_{n,k})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. Par Bolzano-Weierstrass, on peut construire une extractice ϕ_0 telle que $(a_{\phi_0(n),0})_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit convergente. Puis, en appliquant Bolzano-Weierstrass sur $(a_{\phi_0(n),1})_{n\in\mathbb{N}^*}$, il existe une extractrice ϕ_1 telle que $(a_{\phi_0\circ\phi_1(n),1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit convergente ; comme sous-suite de la précédente, $(a_{\phi_0\circ\phi_1(n),0})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi. En continuant ainsi, on construit une extractrice ϕ telle que $(a_{\phi(n),k})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, pour tout $k\in[\![0,K-1]\!]$. Donc, $(P_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un polynôme $P_\infty\in\mathbb{R}_{K-1}[X]$.

(c) Pour tout $k\in[\![0,K-1]\!]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|a_{\phi(n),k}|\leq 1$. En passant à la limite, on en déduit que les coefficients de P_∞ sont en valeur absolue ≤ 1, donc $M(P_\infty)\leq 1$.
De plus, pour tout n, on peut trouver un indice $k_n\in[\![0,K-1]\!]$ tel que $|a_{\phi(n),k_n}|=1$. Comme k_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs, une valeur k' est prise une infinité de fois. On a donc une extractice ϕ (*encore !*) telle que $|a_{\phi\circ\psi(n),k'}|=1$, pour tout n. Alors, le coefficient d'indice k' de P_∞, comme limite de $(a_{\phi\circ\psi(n),k'})$ vaut 1 en valeur absolue, donc $M(P_\infty)=1$.
Les coefficients de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ceux de P_∞. Si $i\in[\![1,K]\!]$,

$$P_n(x_i)=\sum_{k=0}^{K-1}a_{n,k}x_i^k.$$

Par opérations élémentaires, ceci converge vers $P_\infty(x_i)$. Comme, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^{K}|P_n(x_i)|\leq\frac{1}{n}$, un passage à la limite donne $\sum_{i=1}^{K}|P_\infty(x_i)|=0$.
Ainsi, P_∞ a K racines. Comme il est de degré au plus $K-1$, il est nul. Ceci est contradictoire avec le fait que $M(P_\infty)=1$.

2. Soit $k\in[\![0,K-1]\!]$. On a

$$P^{(k)}=\sum_{i=k}^{K-1}a_i\times i(i-1)\dots(i-k+1)X^{i-k}.$$

Donc, pour tout $x\in[0,1]$, on a

$$|P^{(k)}(x)|\leq\sum_{i=k}^{K-1}|a_i|\times i(i-1)\dots(i-k+1)\leq D_kM(P),$$

pour une certaine constante D_k indépendante de P.
En notant D le maximum des D_k et pour A la constante de la première question, on a donc :

$$\forall P\in\mathbb{R}_{K-1}[X],\forall k\in[\![0,K-1]\!],\|P^{(k)}\|_\infty\leq DM(P)\leq DA\sum_{i=1}^{K}|P(x_i)|.$$

Ceci conclut, en posant $C=DA$.

3. Notons $L_1, \ldots, L_K$ les polynômes d'interpolation de Lagrange pour la donnée $x_1, \ldots, x_k$. On sait que si $P \in \mathbb{R}_{K-1}[X]$, alors
$$P = \sum_{i=1}^{K} P(x_i) L_i.$$
Donc, pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$ et pour tout $x \in [0,1]$,
$$P^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{K} P(x_i) L_i^{(k)}(x).$$
Par inégalité triangulaire, on en déduit
$$|P^{(k)}(x) \leq \sum_{i=1}^{k} |P(x_i)||L_i^{(k)}(x)|.$$
Puis, en passant au sup sur $x \in [0,1]$:
$$\|P^{(k)}\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{K} |P(x_i)|\|L_i^{(k)}\|_\infty,$$
où $\|L_i^{(k)}\|_\infty$ est bien défini car $L_i^{(k)}$ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$. En prenant pour C le maximum des $\|L_i^{(k)}\|_\infty$ pour $k \in [\![0, K-1]\!]$, on a l'inégalité souhaitée.

2.2 Conclusion par interpolation de Lagrange

4. Par construction de P, f et P ont même valeur en $x_1, \ldots, x_K$, donc $f - P$ s'annule au moins en K points distincts de $[0,1]$.
Par application répétée du théorème de Rolle, on en déduit classiquement que $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule au moins $K - k$ fois sur $[0,1]$.

5. Soit $k \in [\![0, K-1]\!]$. Soit $x \in [0,1]$. Par la question précédente, il existe $u_k \in [0,1]$ tel que $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule en u. L'inégalité des accroissements finis appliquée à $f^{(k)} - P^{(k)}$ sur le segment de bornes x et u donne :
$$|(f^{(k)} - P^{(k)})(x) - (f^{(k)} - P^{(k)})(u)| \leq \|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\|_\infty |x - u|.$$
Comme $x, u \in [0,1]$, $|x - u| \leq 1$, donc :
$$|(f^{(k)} - P^{(k)})(x)| \leq \|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\|_\infty.$$
Ceci étant vrai pour tout $x \in [0,1]$, on conclut en prenant le sup sur $x \in [0,1]$.

6. Soit $k \in [\![0, K-1]\!]$. Par application répétée de l'inégalité de la question précédente, on a :
$$\|f^{(k)} - P^{(k)}\|_\infty \leq \|f^{(K)} - P^{(K)}\|_\infty = \|f^{(K)}\|_\infty,$$
la dernière égalité venant de ce que $P^{(K)}$ est nul (car $P \in \mathbb{R}_{K-1}[X]$).
De plus, pour tout $x \in [0,1]$, l'inégalité triangulaire donne
$$|f^{(k)}(x)| \leq |f^{(k)}(x) - P^{(k)}(x)| + |P^{(k)}(x)| \leq \|f^{(k)} - P^{(k)}\|_\infty + \|P^{(k)}\|_\infty,$$

d'où $\|f^{(k)}\|_\infty \le \|f^{(k)} - P^{(k)}\|_\infty + \|P^{(k)}\|_\infty$, en passant au sup sur $x \in [0,1]$. En combinant les inégalités sur $\|f^{(k)} - P^{(k)}\|_\infty$ et sur $\|P^{(k)}\|_\infty$ (question 2.), on a donc

$$\|f^{(k)}\|_\infty \le \|f^{(K)}\|_\infty + C\sum_{i=1}^{K} |P(x_i)| = \|f^{(K)}\|_\infty + C\sum_{i=1}^{K} |f(x_i)|.$$

De plus, C ne dépend pas de f (*cette constante ne dépend que de $x_1, \ldots, x_n$ mais ils sont fixés dans l'exercice.*)
Ceci conclut.