DM 17 - Trigonalisation d'endomorphismes nilpotents

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{L}(E)$ un ensemble d'endomorphismes *nilpotents* de E. L'objectif du problème est de démontrer l'existence d'une base $\mathscr{B}$ de E telle que, pour tout $u \in \mathscr{A}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est triangulaire supérieure stricte – dans les cas suivants :

- Partie 1, $\mathscr{A}$ contient un unique endomorphisme nilpotent ;
- Partie 2, $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathscr{L}(E)$;
- Partie 3, $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre de Lie nilpotente de $\mathscr{L}(E)$ – c'est le théorème d'Engel.

1 Trigonalisation d'un endomorphisme nilpotent

Soit u un endomorphisme nilpotent de E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\, u \neq \{0\}$.

On fixe un vecteur $x \in \mathrm{Ker}\, u \setminus \{0\}$ et on complète x en une base $\mathbf{b} = (x, e_2, \ldots, e_n)$ de E. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathbf{b}}(u)$ et $A_1 \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la sous-matrice de A formée par ses $n-1$ dernières lignes et colonnes. On souhaite montrer de deux façons différentes que A_1 est nilpotente.

2. **Avec un projecteur.** On note p le projecteur sur $E_1 = \mathrm{Vect}(e_2, \ldots, e_n)$ parallèlement à $\mathbb{K}x$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(p \circ u)^k = p \circ u^k$.
   (b) Justifier que $(p \circ u)_{|E_1}$ peut être considéré comme un endomorphisme de E_1 ; montrer que sa matrice dans la base $\mathbf{b}_1 = (e_2, \ldots, e_n)$ est A_1.
   (c) En déduire que A_1 est nilpotente.
3. **Par un produit par blocs.**
   Redémontrer que A_1 est nilpotente en utilisant un produit matriciel par blocs.
4. En raisonnant par récurrence sur la dimension de E, montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est triangulaire supérieure stricte.
   On écrira soigneusement l'hypothèse de récurrence.

2 Trigonalisation simultanée - cas abélien

On considère $\mathscr{A}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ telle que

- Tout endomorphisme $u \in \mathscr{A}$ est nilpotent.
- Pour tous $u, v \in \mathscr{A}$, $u \circ v = v \circ u$.

On souhaite montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E tel que tout $u \in \mathscr{A}$ est représenté dans $\mathscr{B}$ par une matrice triangulaire supérieure stricte.

5. Montrer que ce résultat permet de retrouver la conclusion de la partie 1.

6. On fixe $u \in \mathscr{A}$. Montrer que pour tout $v \in \mathscr{A}$, $v(\operatorname{Ker} u) \subset \operatorname{Ker} u$.

Pour tout $v \in \mathscr{A}$, on note $v_K \in \mathscr{L}(\operatorname{Ker} u)$ l'endomorphisme $v_{|\operatorname{Ker} u}^{|\operatorname{Ker} u}$. On définit $\mathscr{A}_K = \{v_K, v \in \mathscr{A}\}$.

7. Montrer que $\mathscr{A}_K \subset \mathscr{L}(\operatorname{Ker} u)$ vérifie les mêmes hypothèses que $\mathscr{A} \subset \mathscr{L}(E)$.

8. En raisonnant par récurrence sur la dimension de E, en déduire qu'il existe $x \neq 0$ tel que, pour tout $v \in \mathscr{A}$, $x \in \operatorname{Ker} v$.

9. Conclure, en reprenant le raisonnement de la partie 1.

3 Trigonalisation simultanée - cas d'une algèbre de Lie nilpotente

Pour tous $u, v \in \mathscr{L}(E)$, on note
$$[u, v] = u \circ v - v \circ u.$$
Un sous-espace vectoriel $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}(E)$ est une *sous-algèbre de Lie* de $\mathscr{L}(E)$ si

$$\forall u, v \in \mathscr{A}, [u, v] \in \mathscr{A}.$$

Une telle sous-algèbre de Lie est dite *nilpotente* si tous ses éléments sont des endomorphismes nilpotents de E.

On souhaite montrer que si $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre de Lie nilpotente de $\mathscr{L}(E)$, alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E tel que tout $u \in \mathscr{A}$ est représenté dans $\mathscr{B}$ par une matrice triangulaire supérieure stricte.[1]

10. Montrer que ce résultat permet de retrouver la conclusion de la partie 2.

11. **Calculs préliminaires :**

    (a) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On définit $\operatorname{ad}_u : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$ par $\operatorname{ad}_u(v) = [u, v]$.
    Montrer que $\operatorname{ad}_u \in \mathscr{L}\big(\mathscr{L}(E)\big)$.

    (b) Montrer l'identité de Jacobi[2] :
    $$\forall u, v, w \in \mathscr{L}(E), \big[u, [v, w]\big] + \big[w, [u, v]\big] + \big[v, [w, u]\big] = 0.$$

    (c) On suppose que $u \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent. Montrer que $\operatorname{ad}_u \in \mathscr{L}\big(\mathscr{L}(E)\big)$ est nilpotent.[3]

Pour démontrer le théorème d'Engel pour une sous-algèbre de Lie nilpotente $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}(E)$, on commence comme précédemment par démontrer la propriété $\mathscr{P}(\mathscr{A})$ suivante : il existe $x \neq \{0\}$ tel que, pour tout $v \in \mathscr{A}$, $x \in \operatorname{Ker} v$. On procède par récurrence sur la dimension de $\mathscr{A}$.

[1] Théorème d'Engel – Friedrich Engel (1861-1941)
[2] Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851)
[3] On pourra exprimer ad_u en fonction de $L_u, R_u \in \mathscr{L}\big(\mathscr{L}(E)\big)$, définis par $L_u(v) = u \circ v$ et $R_u(v) = v \circ u$.

12. Montrer $\mathscr{P}(A)$ si $\dim \mathscr{A} = 1$.

On suppose maintenant que $\dim \mathscr{A} = d \geq 2$ et on suppose $\mathscr{P}(\mathscr{A}')$ démontrée pour toute sous-algèbre de Lie nilpotente $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{L}(E')$ si $\dim \mathscr{A}' \leq d-1$.

13. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel strict $\mathscr{A}_1$ de $\mathscr{A}$, tel que $\forall u, v \in \mathscr{A}_1, [u, v] \in \mathscr{A}_1$, et qui est de dimension maximale pour ces propriétés.

On fixe un supplémentaire S de $\mathscr{A}_1$ dans $\mathscr{A}$. Si $u \in \mathscr{A}$, on note $u = u_S + u_{\mathscr{A}_1}$ la décomposition de u selon $\mathscr{A} = S \oplus \mathscr{A}_1$. Soit $u \in \mathscr{A}_1$, on définit $\rho_u \in \mathscr{L}(S)$ par

$$\forall v \in S, \rho_u(v) = [u, v]_S.$$

14. Montrer que, pour tout $u \in \mathscr{A}_1$, ρ_u est bien un élément de $\mathscr{L}(S)$.
15. Montrer que, si $u, v \in \mathscr{A}_1$ et si $w \in S$, alors $\rho_u \circ \rho_v(w) = \big[u, [v, w]\big]_S$.
16. Montrer que $\rho : u \mapsto \rho_u$ est une application linéaire de $\mathscr{A}_1$ dans $\mathscr{L}(S)$ et que[4]

$$\forall u, v \in \mathscr{A}_1, \rho\big([u, v]\big) = [\rho(u), \rho(v)].$$

17. Montrer qu'il existe $v_0 \in S \setminus \{0\}$ tel que $\forall u \in \mathscr{A}_1, \rho_u(v_0) = 0$.
18. Montrer que $\forall u \in \mathscr{A}_1, [u, v_0] \in \mathscr{A}_1$. En déduire que $\dim \mathscr{A}_1 = d - 1$.

On note $E_1 = \big\{x \in E \mid \forall u \in \mathscr{A}_1, u(x) = 0\big\}$.

19. Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E, non réduit à $\{0\}$ et stable par tous les éléments de $\mathscr{A}$.
20. En considérant la restriction à E_1 des éléments de $\mathscr{A}$, conclure la démonstration de $\mathscr{P}(\mathscr{A})$.
21. En déduire le théorème annoncé de trigonalisation simultanée.

[4] Le crochet de droite est défini comme $\rho(u) \circ \rho(v) - \rho(v) \circ \rho(u)$, en considérant $\rho(u)$ et $\rho(v)$ comme des endomorphismes de S.