DM 17 - Trigonalisation d'endomorphismes nilpotents

1 Trigonalisation d'un endomorphisme nilpotent

1. Considérons un vecteur x quelconque dans $E\setminus\{0\}$. Comme u est nilpotente, il existe un plus petit entier $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $u^p(x)=0$. En notant $y=u^{p-1}(x)$, on a donc $y\neq 0$ et $u(y)=0$. Donc, $\operatorname{Ker} u\neq\{0\}$.

2. **Avec un projecteur.**
   (a) Montrons que $u\circ p=u$. Par définition de p, id_E-p est le projecteur sur $\mathbb{K}x$ parallèlement à E_1. Comme $x\in\operatorname{Ker} u$, u est nul sur l'image de id_E-p. On a donc $u\circ(\mathrm{id}_E-p)=0$, c'est-à-dire $u=u\circ p$.
   Si $k\in\mathbb{N}^*$. On a $(p\circ u)^k=p\circ(u\circ p)^{k-1}\circ u=p\circ u^k$.

   (b) Comme p est à valeurs dans E_1, $p\circ u$ aussi et on peut co-restreindre $(p\circ u)_{|E_1}$ à E_1, ce qui en fait un endomorphisme de E_1. Par définition, les coefficients $a_{i,j}$ de A vérifient :

$$\forall j\in[\![2,n]\!],\ u(e_j)=a_{1,j}x+\sum_{i=2}^{n}a_{i,j}e_i.$$

   On en déduit que

$$\forall j\in[\![2,n]\!],\ p\circ u(e_j)=\sum_{i=2}^{n}a_{i,j}e_i$$

   par définition de p. Ceci montre que A_1 est la matrice de $(p\circ u)_{|E_1}$ dans $\mathbf{b}_1$.

   (c) Comme u est nilpotente, il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $(p\circ u)^p=p\circ u^p=0$. En particulier, l'endomorphisme $(p\circ u)_{|E_1}$ est nilpotent, donc A_1 qui le représente dans $\mathbf{b}_1$ aussi.

3. **Par un produit par blocs.**
   La matrice A est de la forme :

$$A=\left(\begin{array}{c|c}0 & B\\ \hline 0 & A_1\end{array}\right),$$

   où $B\in\mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$. Par une récurrence immédiate, un produit par blocs donne :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ A^k=\left(\begin{array}{c|c}0 & B_k\\ \hline 0 & A_1^k\end{array}\right),$$

   où $B_k\in\mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$. Comme A est nilpotente, $A^p=0$ pour un certain $p\in\mathbb{N}^*$ et donc $A_1^p=0$ aussi.

4. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{P}(k)$ la propriété : si E est un espace vectoriel de dimension k et si u est un endomorphisme nilpotent de E, alors on peut trouver une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est triangulaire supérieure stricte.
   Pour l'initialisation ($k=1$), on remarque que le seul endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension 1 est l'endomorphisme nul ; toute base convient.

Supposons la propriété $\mathscr{P}(n-1)$ montrée pour un $n \geq 2$ et considérons un espace E de dimension n et u un endomorphisme nilpotent de E. On représente u comme précédemment par une matrice A dans une base $\mathbf{b} = (x, e_2, \ldots, e_n)$ de E, avec $x \in \operatorname{Ker} u$. Le bloc carré inférieur droit de taille $n-1$, qu'on note A_1, est nilpotent. Il représente un certain endomorphisme de $E_1 = \operatorname{Vect}(e_2, \ldots, e_n)$ qu'on note u_1 ($u_1 = (p \circ u)_{|E_1}$ avec les notations précédentes). Par hypothèse de récurrence, on peut trouver une base de $\mathbf{e'} = (e'_2, \ldots, e'_n)$ de E_1 tel que $A'_1 = \operatorname{Mat}_{\mathbf{e'}}(u_1)$ est triangulaire supérieure stricte. Dans la base $\mathscr{B} = (x, e'_2, \ldots, e'_n)$ de E, $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & B' \\ \hline 0 & A'_1 \end{array}\right),$$

où $B' \in \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$. Donc, $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est triangulaire supérieure stricte, ce qui conclut la récurrence.

2 Trigonalisation simultanée - cas abélien

5. Si u est un endomorphisme nilpotent, le sous-espace $\mathscr{A} = \mathbb{K} u$ de $\mathscr{L}(E)$ vérifie les hypothèses de la partie 2 :

   - Si $v \in \mathscr{A}$, v est de la forme λu donc est nilpotent.
   - Si $v, w \in \mathscr{A}$, v et w sont colinéaires à u donc $v \circ w = w \circ v$.

   Ainsi, les résultats de cette partie permettent de retrouver le résultat de la partie 1.

6. Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. On a
$$u\big(v(x)\big) = v\big(u(x)\big) = v(0) = 0.$$
   Donc, $v(x) \in \operatorname{Ker} u$. Donc, $v(\operatorname{Ker} u) \subset \operatorname{Ker} u$.

7. Remarquons déjà que $\mathscr{A}_K$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\operatorname{Ker} u)$, car si $u, v \in \mathscr{A}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha u_K + \beta v_K = (\alpha u + \beta v)_K$.
   Soit $v \in \mathscr{A}$. Comme v est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $v^p = 0$. En particulier, pour tout $x \in \operatorname{Ker} u$, $v^p(x) = 0$ et donc, v_K est nilpotente.
   Soient $v, w \in \mathscr{A}$. Comme $v \circ w = w \circ v$, l'égalité est vraie en particulier en restriction à $\operatorname{Ker} u$. Donc, $v_K \circ w_K = w_K \circ v_K$.
   Donc, $\mathscr{A}_K$ vérifie les mêmes hypothèses que $\mathscr{A}$.

8. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{P}(k)$ la propriété suivante : si E est un espace vectoriel de dimension k et si $\mathscr{A} \subset \mathscr{L}(E)$ vérifie les hypothèses de la partie, alors il existe $x \neq 0$ tel que $x \in \operatorname{Ker} v$, pour tout $v \in \mathscr{A}$.
   Pour $k = 1$, $\mathscr{A}$ est nécessairement réduit à $\{0\}$ et la propriété est évidente.
   Supposons $\mathscr{P}(k)$ montré pour tout $k \leq n-1$, avec $n \geq 2$. On considère un espace E de dimension n et $\mathscr{A} \subset \mathscr{L}(E)$ vérifiant les hypothèses. Si $\mathscr{A}$ est réduit à $\{0\}$, toute base de E convient. Sinon, on peut trouver $u \in \mathscr{A} \setminus \{0\}$. Alors, $\operatorname{Ker} u$ est un sous-espace vectoriel de dimension $\leq n-1$. On applique l'hypothèse de récurrence à $\mathscr{A}_K \subset \mathscr{L}(\operatorname{Ker} u)$. Il existe donc $x \in \operatorname{Ker} u \setminus \{0\}$ tel que pour tout $v \in \mathscr{A}$, $v(x) = v_K(x) = 0$. Ceci conclut la récurrence.

9. On raisonne de nouveau par récurrence sur la dimension de E. On complète le x trouvé à la question précédente en une base $\mathbf{b} = (x, e_2, \ldots, e_n)$ de E. On représente les matrices de $\mathscr{A}$

dans cette base. Si $u \in \mathscr{A}$ est représenté par une matrice A, la matrice A_1 formant le bloc carré inférieur droit de taille $n-1$ représente un endomorphisme de $E_1 = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n)$, qu'on note v_1. En utilisant des produits par blocs, on montre que $\mathscr{A}_1 = \{v_1, v \in \mathscr{A}\}$ vérifie les hypothèses de la partie 2, dans l'espace E_1. Par hypothèse de récurrence, on peut trouver une base $\mathbf{b}_1$ de E_1 dans laquelle les v_1 sont représentés par des matrices triangulaires supérieures strictes. Dans la base obtenue par concaténation de x et de $\mathbf{b}_1$, les endomorphisme $v \in \mathscr{A}$ sont représentés par des matrices triangulaires supérieures strictes, ce qui conclut la récurrence.

3 Trigonalisation simultanée - cas d'une algèbre de Lie nilpotente

10. Si $\mathscr{A}$ est comme dans la partie précédente, alors

$$\forall u, v \in \mathscr{A}, [u, v] = u \circ v - v \circ u = 0 \in \mathscr{A}.$$

Ainsi, la partie 3 généralise la partie 2.

11. **Calculs préliminaires :**

(a) Soient $v, w \in \mathscr{L}(E)$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_u(\lambda v + \mu w) &= [u, \lambda v + \mu w] \\
&= u \circ (\lambda v + \mu w) - (\lambda v + \mu w) \circ u \\
&= \lambda u \circ v + \mu u \circ w - \lambda v \circ u - \mu w \circ u \\
&= \lambda [u, v] + \mu [u, w] \\
&= \lambda \, \mathrm{ad}_u(v) + \mu \, \mathrm{ad}_u(w).
\end{aligned}$$

(b) Soient $u, v, w \in \mathscr{L}(E)$. On calcule :

$$\begin{aligned}
&[u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] \\
&= [u, vw - wv] + [w, uv - vu] + [v, wu - uw] \\
&= u(vw - wv) - (vw - wv)u + w(uv - vu) - (uv - vu)w + v(wu - uw) - (wu - uw)v \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On vérifie en effet que les 12 termes développés se simplifient deux par deux.

(c) Les applications L_u et R_u sont des endomorphismes de $\mathscr{L}(E)$. Pour tout $v \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{ad}_u(v) = uv - vu = L_u(v) - R_u(v)$, donc $\mathrm{ad}_u = L_u - R_u$. De plus, L_u et R_u commutent : pour tout $v \in \mathscr{L}(E)$, on a $L_u \circ R_u(v) = R_u \circ L_u(v) = uvu$.
On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton dans l'anneau $\mathscr{L}(E)$, avec les deux endomorphismes R_u et L_u :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \mathrm{ad}_u^N = (L_u - R_u)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} L_u^k (-1)^{N-k} R_u^{N-k}.$$

On peut évaluer en $v \in \mathscr{L}(E)$ et réécrire la formule en

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall v \in \mathscr{L}(E), \mathrm{ad}_u^N(v) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (-1)^{N-k} u^k v u^{N-k}.$$

Si u est nilpotent, on a $u^n = 0$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$. En prenant $N = 2n-1$ dans la formule précédente, on a, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $k \geq n$ ou $N-k \geq n$, et donc $u^k = 0$ ou $u^{N-k} = 0$. Ceci montre que si $u^n = 0$, alors $\mathrm{ad}_u^{2n-1} = 0$. Donc, ad_u est nilpotent si u est nilpotent.

12. Si $\dim \mathscr{A} = 1$, $\mathscr{A} = \mathrm{Vect}(u)$, où u est un endomorphisme nilpotent. On considère $x_0 \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors, comme tout élément de $\mathscr{A}$ est multiple de u, x_0 est aussi dans son noyau, donc x_0 convient.

13. On considère l'ensemble $\mathscr{W}$ de tous les sous-espaces vectoriels stricts W de $\mathscr{A}$ tels que $\forall u, v \in W, [u, v] \in W$. Cet ensemble est non vide, car l'espace nul (et tous les sous-espaces de $\mathscr{A}$ de dimension 1) sont dans $\mathscr{W}$. L'ensemble des dimensions des $W \in \mathscr{W}$ est une partie de $\mathbb{N}$ majorée par $d-1$; elle admet donc un élément maximal, correspond à un sous-espace $\mathscr{A}_1$, répondant à la question.

14. Par définition, ρ_u est une fonction définie sur S, et renvoyant un élément de S. En effet, $[u, v]_S$ est la composante de $[u, v]$ sur S dans la décomposition $\mathscr{A} = S \oplus \mathscr{A}_1$. Notons $\pi_S : \mathscr{A} \to S, v \mapsto v_S$. Alors π_S est une application linéaire (c'est la co-restriction à S du projecteur sur S parallèlement à $\mathscr{A}_1$) et, par définition, $\rho_u = \pi_S \circ \mathrm{ad}_u$. Donc, $\rho_u \in \mathscr{L}(S)$.

15. Soient $u, v \in \mathscr{A}_1$, soit $w \in S$. On calcule :

$$\rho_u \circ \rho_v(w) = \rho_u([v, w]_S) = [u, [v, w]_S]_S.$$

Or, $[v, w]_S = [v, w] - [v, w]_{\mathscr{A}_1}$. Donc,

$$\rho_u \circ \rho_v(w) = [u, [v, w]]_S - [u, [v, w]_{\mathscr{A}_1}]_S.$$

Mais comme $\mathscr{A}_1$ est stable par crochets et que u et $[v, w]_{\mathscr{A}_1}$ sont dans $\mathscr{A}_1$, $[u, [v, w]_{\mathscr{A}_1}]$ est dans $\mathscr{A}_1$, donc sa composante selon S est nulle. On a donc bien :

$$\rho_u \circ \rho_v(w) = [u, [v, w]]_S.$$

16. Soient $u_1, u_2 \in \mathscr{A}_1$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Soit $v \in S$. On calcule :

$$\begin{aligned}\rho_{\lambda u_1 + \mu u_2}(v) &= [\lambda u_1 + \mu u_2, v]_S \\ &= \lambda [u_1, v]_S + \mu [u_2, v]_S \\ &= \lambda \rho_{u_1}(v) + \mu \rho_{u_2}(v),\end{aligned}$$

par des calculs analogues aux précédents. Ceci étant vrai pour tout $v \in S$, on a $\rho_{\lambda u_1 + \mu u_2} = \lambda \rho_{u_1} + \mu \rho_{u_2}$. Ceci montre la linéarité de ρ.

Soient alors $u, v \in \mathscr{A}_1$ et $w \in S$. On calcule le crochet de droite :

$$[\rho(u), \rho(v)](w) = \rho_u \circ \rho_v(w) - \rho_v \circ \rho_u(w) = [u, [v, w]]_S - [v, [u, w]]_S,$$

en utilisant la question précédente. Comme $[u, w] = -[w, u]$, l'identité de Jacobi peut être réécrite :

$$[u, [v, w]] - [v, [u, w]] = -[w, [u, v]] = [[u, v], w].$$

Ainsi, en prenant les composantes selon S, $[\rho(u), \rho(v)](w) = [[u, v], w]_S = \rho([u, v])(w)$.

Ceci étant vrai pour tout $w \in S$, on a $\rho([u, v]) = [\rho(u), \rho(v)]$.

17. On a dit plus haut que $\mathscr{A}_1 \neq 0$. Donc $\dim S \leq d-1$. Ainsi, le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im}\rho \subset \mathscr{L}(S)$ est de dimension $\leq d-1$, comme image d'un espace de dimension $\leq d-1$ par une application linéaire. De plus, c'est une sous-algèbre de Lie de $\mathscr{L}(S)$, d'après la question précédente (qui montre la stabilité par crochets).

    Enfin, si $u \in \mathscr{A}_1$, ρ_u est nilpotent. En effet, on a montré dans la question 15, que $\rho_u^2(w) = \mathrm{ad}_u^2(w)_S$, si $w \in S$. Par une récurrence immédiate, on montre plus généralement que $\rho_u^N(w) = \mathrm{ad}_u^N(w)_S$, pour tout $N \in \mathbb{N}$. Comme ad_u est nilpotent (d'après les calculs préliminaires), ρ_u l'est aussi.

    Ainsi, $\operatorname{Im}\rho \subset \mathscr{L}(S)$ est une sous-algèbre de Lie de dimension $\leq d-1$, formée d'endomorphismes nilpotents. Par hypothèse de récurrence, on peut trouver $v_0 \in S - \{0\}$ tel que, pour tout $f \in \operatorname{Im}\rho, f(v_0) = 0$.

    Cela revient à dire que pour tout $u \in \mathscr{A}_1, \rho_u(v_0) = 0$.

18. Par définition de ρ_u, on a donc
$$\forall u \in \mathscr{A}_1, [u, v_0]_S = 0.$$
    Mais dire que la composante selon S est nulle revient à dire qu'on est élément de $\mathscr{A}_1$. Donc, $\forall u \in \mathscr{A}_1, [u, v_0] \in \mathscr{A}_1$.

    Considérons alors le sous-espace $\mathscr{A}_1 \oplus \mathrm{Vect}(v_0)$ de $\mathscr{A}$. On a :

    - $\forall u, v \in \mathscr{A}_1, [u, v] \in \mathscr{A}_1$
    - $\forall u \in \mathscr{A}_1, [u, v_0] \in \mathscr{A}_1$
    - $[v_0, v_0] = 0$.

    Par linéarité, on en déduit que ce sous-espace $\mathscr{A}_1 \oplus \mathrm{Vect}(v_0)$ est stable par crochets. Pour ne pas contredire l'hypothèse de maximalité de $\mathscr{A}_1$ (parmi les sous-espaces stricts de $\mathscr{A}$), on doit donc avoir $\mathscr{A}_1 \oplus \mathrm{Vect}(v_0) = \mathscr{A}$. Donc, $\mathscr{A}_1$ est un hyperplan de $\mathscr{A}$. Donc $\dim \mathscr{A}_1 = d - 1$.

19. E_1 est un sous-espace vectoriel de E car c'est l'intersection $\bigcap_{u \in \mathscr{A}_1} \operatorname{Ker} u$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $\mathscr{A}_1$ (de dimension $\leq d - 1$), on montre de plus que E_1 n'est pas réduit à $\{0\}$.

    Il reste à montrer que E_1 est stable par les éléments de $\mathscr{A}$. Soit $x \in E_1$, soit $v \in \mathscr{A}$. Soit $u \in \mathscr{A}_1$. On a
$$u(v(x)) = [u, v](x) - v(u(x)).$$
    Comme x est dans E_1 et u dans $\mathscr{A}_1$, $u(x)$ s'annule et on a donc $u(v(x)) = [u, v](x)$. Mais, on a montré à la question précédente que $[u, v] \in \mathscr{A}_1$ dès que $u \in \mathscr{A}_1$ et $v \in \mathscr{A}$. Donc, on a aussi $[u, v](x) = 0$. Ceci montre que si $x \in E_1$, alors $v(x) \in E_1$, pour tout $v \in \mathscr{A}$.

20. D'après la question 9, $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \oplus \mathrm{Vect}(v_0)$. Par définition, tous les éléments de $\mathscr{A}_1$ sont nuls en restriction à E_1. De plus, v_0 laisse E_1 stable ; l'endomorphisme induit $(v_0)_{E_1} \in \mathscr{L}(E_1)$ est nilpotent donc a un noyau non trivial (on a montré que $E_1 \neq \{0\}$). Si $x_0 \in E_1$ est un élément de ce noyau, alors x_0 est dans le noyau de v_0 et de tous les éléments de $\mathscr{A}_1$. Par linéarité, il est dans le noyau de tous les $u \in \mathscr{A}$. Ceci conclut.

21. On raisonne par récurrence sur $\dim E$. On peut trouver $x \neq 0$ tel que pour tout $u \in \mathscr{A}$, $u(x) = 0$.

Si $\dim E = 1$, $\mathscr{A}$ est réduit à $\{0\}$ car tout endomorphisme de E est une homothétie ; il n'est nilpotent que s'il est nul. Supposons le résultat vrai pour $\dim E = n-1$. Soit E de dimension n. Considérons $\mathscr{B}' = (x, e_2, ..., e_n)$ une base de E. Dans cette base, tout élément u de $\mathscr{A}$ s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & A_u \end{pmatrix}$. On montre comme précédemment que l'ensemble des endomophismes de $F = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ représentés par les A_u est une sous-algèbre de Lie nilpotente de $\mathscr{L}(F)$. Par hypothèse de récurrence, il existe une base $(e'_2, ..., e'_n)$ de F dans laquelle ces matrices sont toutes triangulaires supérieures strictes. Dans $\mathscr{B} = (x_0, e'_2, ..., e'_n)$, les matrices des $u \in \mathscr{A}$ sont toutes triangulaires supérieures strictes. Ce qui conclut.