20 - Algèbre linéaire, dimension finie

Jeremy Daniel

On désigne par $\mathbb{K}$ un corps quelconque.

1 Dimension d'un espace vectoriel

1.1 Espace vectoriel de dimension finie

Définition 1.1 (Espace vectoriel de dimension finie)
On dit que E est de dimension finie si E est engendré par un nombre fini de vecteurs. Sinon, il est de dimension infinie.

Exemples 1.2
- Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie.
- $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie : il est engendré par la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.
- $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.
- L'ensemble E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$f : t \mapsto A\cos(t + \phi),$$

  où $A, \phi \in \mathbb{R}$, est un espace vectoriel de dimension finie. Il est en fait engendré par cos et sin.

Lemme 1.3
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\boldsymbol{e} = (e_i)_{i=1}^k$ une famille libre et $\boldsymbol{f} = (f_j)_{j=1}^n$ une famille génératrice de E. Alors, on peut compléter la famille $\mathbf{e}$ en une base de E, en lui adjoignant des éléments de la famille $\boldsymbol{f}$.

Remarque 1.4
On utilise le plus souvent ce lemme dans le cas où la famille $\mathbf{e}$ est une sous-famille de la famille $\mathbf{f}$. La famille $\mathbf{b}$ est alors intermédiaire entre $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$.

Exemple 1.5
Dans $\mathbb{R}^3$, la famille à deux éléments $\mathbf{e} = \big((1,1,0),(1,0,1)\big)$ est libre et la famille $\mathbf{f} = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ est génératrice. On peut donc compléter $\mathbf{e}$ en une base de $\mathbb{R}^3$ en lui adjoignant un élément de $\mathbf{f}$. On vérifie que $\mathbf{b} = \big((1,1,0),(1,0,1),(1,0,0)\big)$ est une telle base.

Théorème 1.6 (Base extraite)
Soit E un espace vectoriel engendré par une famille finie $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)$. Alors, on peut extraire de $\boldsymbol{f}$ une base de E – c'est-à-dire qu'il existe une sous-famille $\boldsymbol{b}$ de $\boldsymbol{f}$, qui est une base de E.

Théorème 1.7 (Base incomplète)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\boldsymbol{e}$ une famille libre de E. Alors, on peut compléter $\boldsymbol{e}$ en une base de E – c'est-à-dire qu'il existe une sur-famille $\boldsymbol{b}$ de $\boldsymbol{e}$ qui est une base de E.

Corollaire 1.8 (Existence de base en dimension finie)
Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Remarque 1.9
L'existence d'une base pour tout espace vectoriel est équivalente à l'axiome du choix. On n'aura jamais besoin de supposer l'existence d'une telle base en dimension infinie – mais on connait bien sûr des bases pour certains espaces vectoriels de dimension infinie, tel $\mathbb{K}[X]$.

1.2 Caractérisation de la dimension

Théorème 1.10 (Cardinal d'une base)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors, toutes les bases de E ont le même cardinal.

Définition 1.11
Ce nombre est la dimension de E.

Notation 1.12
On le note $\dim_{\mathbb{K}} E$ ou simplement $\dim E$ quand il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps des scalaires.

Exemples 1.13
- Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension n. La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ en est une base.
- Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ a dimension $n+1$; la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ en est une base.
- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 : $(1, i)$ en est une base. Ainsi, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. Cependant, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

Remarque 1.14
Un espace de dimension 0 est un espace réduit au singleton $\{0\}$. Un espace de dimension 1 est une droite vectorielle.

Théorème 1.15 (Théorème du demi fainéant linéaire - bases)

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathbf{e}$ une famille d'éléments. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *$\mathbf{e}$ est une base de E ;*
2. *$\mathbf{e}$ est une famille libre de E de cardinal n ;*
3. *$\mathbf{e}$ est une famille génératrice de E de cardinal n.*

Remarque 1.16
En pratique, pour montrer qu'une famille de vecteurs de cardinal n est une base d'un espace vectoriel de dimension n, il suffit de montrer qu'elle est libre ou génératrice. En général, il est plus simple de montrer la liberté.

Exercice 1.17
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $(P_k)_{k=0}^n$ est une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\deg P_k = k$, alors c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Dans $\mathbb{K}_n[X]$, la famille $(P_k)_{k=0}^n$, donnée par $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$ est une base.

2 Sous-espaces vectoriels et dimensions

2.1 Sous-espaces en dimension finie

Proposition 2.1 (Dimension d'un sous-espace)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie $p \leq n$. De plus, $p = n$ si, et seulement si $F = E$.

Remarque 2.2
Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace E de dimension finie, on peut considérer une base $\mathbf{b}_F$ de F et la compléter en une base $\mathbf{b}_E$ en lui adjoignant des éléments de E. En revanche, si on considère une base $\mathbf{b}_E$ de E, il n'est en général pas possible d'en extraire une base de F.

Exemple 2.3
Dans $E = \mathbb{R}^2$, on considère $F = \mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$. Alors, la famille à 1 élément $\big((1,1)\big)$ est une base de F, on peut la compléter en une base de E, par exemple $\big((1,1),(1,-1)\big)$. En revanche, de la base canonique $((1,0),(0,1))$ de E, on ne peut pas extraire une base de F : en effet, ni $(1,0)$, ni $(0,1)$ ne sont des vecteurs de F !

Exercice 2.4
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \mathrm{Vect}\big((1,1,-2),(0,1,-1)\big)$ et $G = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\big\}$. Montrer que $F = G$.

Définition 2.5 (Rang d'une famille de vecteurs)
Soit E un espace vectoriel et soit $\mathbf{f}$ une famille finie de vecteurs de E. Le rang de $\mathbf{f}$ est la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathbf{f})$.

Notation 2.6
On le note $\operatorname{rg} \mathbf{f}$.

Attention !
Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ et une famille $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_p)$ une famille d'éléments de E. Notons $k = \operatorname{rg} \mathbf{f}$. Alors, les trois quantités n, k et p sont en général différentes et il ne faut pas les confondre !

- n est la dimension de l'espace ambiant E.
- p est le nombre d'éléments de la famille ; il peut être aussi grand que l'on veut si on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire.
- $k = \operatorname{rg} \mathbf{f}$ est la dimension du sous-espace vectoriel F engendré par $\mathbf{f}$.

On a donc $k \leq n$ (car $F \subset E$) et $k \leq p$ (car un espace engendré par p vecteurs a dimension au plus p). De plus,

- $k = n$ ssi $\mathbf{f}$ est une famille génératrice de E.
- $k = p$ ssi $\mathbf{f}$ est une famille libre.

2.2 Produits et sommes directes

Proposition 2.7 (Dimension d'un espace vectoriel produit)
Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E_1 \times E_2$ est de dimension finie et

$$\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2.$$

Corollaire 2.8
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $p \in \mathbb{N}$. Alors, $\dim E^p = p \dim E$.

Proposition 2.9 (Base adaptée à une décomposition en supplémentaires)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $E = F \oplus G$ une décomposition en somme de sous-espaces supplémentaires. Si $(f_1, \ldots, f_k)$ est une base de F et si $(g_1, \ldots, g_p)$ est une base de G, alors la famille $\mathbf{e} = (f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_p)$ est une base de E.
En particulier, $\dim E = \dim F + \dim G$.

Remarque 2.10
On généralise à une décomposition de p sous-espaces. Si $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} E_i$, alors

$$\dim E = \sum_{i=1}^{k} \dim E_i.$$

Lemme 2.11
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel F de E admet un supplémentaire.

Attention !
Il y a une infinité de choix possibles pour un supplémentaire d'un sous-espace fixé (si $\mathbb{K}$ est infini).

2.3 Sommes et intersection

Théorème 2.12 (Formule de Grassmann)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors
$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Remarque 2.13
L'égalité $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$ a donc lieu si, et seulement si F et G sont en somme directe.

Corollaire 2.14 (Théorème du demi fainéant linéaire - sous-espaces)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. On a équivalence entre les assertions suivantes :
1. $E = F \oplus G$;
2. $E = F + G$ *et* $\dim E = \dim F + \dim G$;
3. $F \cap G = \{0\}$ *et* $\dim E = \dim F + \dim G$.

Remarque 2.15
En pratique, pour montrer que deux sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E, on montre
- $\dim E = \dim F + \dim G$;
- $E = F + G$ **ou** $F \cap G = \{0\}$.

Le plus souvent, il est plus simple de montrer que $F \cap G = \{0\}$.

Attention !
Il n'y a pas d'analogue de la formule du crible pour les dimensions de sous-espaces vectoriels.

Exercice 2.16
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient F_1, F_2 et F_3 des sous-espaces vectoriels de E.

a) Montrer que
$$\dim(F_1+F_2+F_3) = \dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3 - \dim(F_2 \cap F_3) - \dim\big(F_1 \cap (F_2+F_3)\big).$$

b) Montrer qu'on n'a pas, en général,
$$\dim(F_1+F_2+F_3) = \dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3 - \big(\dim(F_1 \cap F_2) + \dim(F_2 \cap F_3) + \dim(F_3 \cap F_1)\big) - \dim\big(F_1 \cap F_2 \cap F_3)\big).$$

3 Applications linéaires et dimensions

3.1 Théorème du rang

Définition 3.1 (Rang d'une application linéaire)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie.
Le rang de f, noté $\operatorname{rg} f$, est la dimension de $\operatorname{Im} f$.

Remarque 3.2
On peut étendre cette définition dans le cas où E et F ne sont pas nécessairement de dimension finie. On dit que $f : E \to F$ est de rang fini si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie. Le rang de f est alors la dimension de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 3.3
Soient E, F et G trois espaces vectoriels et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications linéaires. On suppose que f et g sont de rang fini. Montrer que $g \circ f$ aussi et que

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g).$$

Proposition 3.4 (Rang d'une application, rang d'une famille)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_k)$ une famille génératrice de E. Alors, le rang de f est le rang de la famille $\boldsymbol{f} = \big(f(e_1), \ldots, f(e_k)\big)$.

Théorème 3.5 (Théorème du rang)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie. Alors,

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f.$$

Exemple 3.6
On considère Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$. Soit $P \in \operatorname{Ker} \Delta$. Alors le polynôme $P(X) - P(0)$ s'annule en tous les entiers, donc il est nul. Donc P est un polynôme constant. Réciproquement, les polynômes constants sont dans $\operatorname{Ker} \Delta$. Donc $\operatorname{Ker} \Delta$ est de dimension 1 et, par le théorème du rang,

$$\operatorname{rg} \Delta = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \operatorname{Ker} \Delta = (n+1) - 1 = n.$$

Par ailleurs, si Q est dans l'image de Δ, on a $\deg Q \leq n-1$. Donc $\operatorname{Im} \Delta \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comme les deux espaces sont de même dimension n, on peut conclure que $\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3.2 Caractérisation des isomorphismes

Théorème 3.7 (Espace de dimension n isomorphe à $\mathbb{K}^n$)
Tout espace vectoriel E de dimension finie n sur $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Remarque 3.8
L'isomorphisme entre E et $\mathbb{K}^n$ est construit à partir du choix, a priori arbitraire, d'une base de E.

Théorème 3.9 (Théorème du demi fainéant linéaire - applications)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie. On a équivalence entre les propositions suivantes :

1. *f est un isomorphisme ;*
2. *f est injective et $\dim E = \dim F$;*
3. *f est surjective et $\dim E = \dim F$.*

Remarque 3.10
En pratique, il est plus simple de montrer qu'une application est injective, plutôt que de montrer qu'elle est surjective.

Corollaire 3.11 (Cas des endomorphismes)
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
Alors, f est bijective ssi f est injective ssi f est surjective.

Exercice 3.12
Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. Soient $x_0, \ldots, x_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$. On considère l'application $\psi : E \to \mathbb{K}^{n+1}$ définie par $\forall P \in E, \psi(P) = \big(P(x_0), \ldots, P(x_n)\big)$.

1. Montrer que ψ est linéaire.
2. Montrer que ψ est injective.
3. En déduire que ψ est surjective ; que retrouve-t-on ?

Corollaire 3.13 (Applications linéaires inversibles à gauche/à droite)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre espaces vectoriels de même dimension finie. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *f est un isomorphisme ;*
2. *f est inversible à gauche, i. e. il existe $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$;*
3. *f est inversible à droite, i. e. il existe $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.*

3.3 Formes linéaires – introduction à la dualité

Proposition 3.14
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, soit H un sous-espace vectoriel de E. Alors H est un hyperplan de E ssi $\dim H = n - 1$.

Théorème 3.15 (Sous-espace vectoriel donné comme intersection d'hyperplans)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soient $H_1, \ldots, H_p$ des hyperplans de E.

Alors $\dim\big(\bigcap_{i=1}^{p} H_i\big) \geq n-p$. *De plus, si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-p$, il existe $H_1, \dots, H_p$ des hyperplans tels que* $F = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$.

Remarque 3.16
On souhaite préciser ce résultat en déterminant la dimension de $\bigcap_{i=1}^{p} H_i$ en fonction de formes linéaires définissant les H_i.

Lemme 3.17
Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux formes linéaires non nulles sur un espace vectoriel E et soient H_1 et H_2 leur noyau respectif. Alors, $H_1 = H_2$ ssi ℓ_1 et ℓ_2 sont colinéaires (dans E^*).

Théorème 3.18 (Dimension d'une intersection d'hyperplans – HP)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $\ell_1, \dots, \ell_p$ des formes linéaires non nulles. Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on note $H_i = \operatorname{Ker} \ell_i$. Alors, $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} H_i\right) = n - r$, *où r est le rang de la famille $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ dans E^*.*

Remarque 3.19
En particulier, il y a égalité $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} H_i\right) = n-p$ ssi $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ est libre dans E^*.

Méthode 3.20
Suivant la situation considérée, un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{K}^n$ pourra être donné
- **Par paramétrage :** on donne une base $(f_1, \dots, f_p)$ de F. Ainsi, F est l'ensemble des vecteurs de la forme $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k$, où les λ_k sont des scalaires. Ils paramètrent F ; il y a autant de paramètres que la dimension de F.
- **Par équations :** on donne F comme l'ensemble des solutions d'un système de $n-p$ équations linéaires, du type $\ell_k(x) = 0$, où les ℓ_k sont des formes linéaires.

Quelle forme privilégier ? Cela dépend du problème. Si on se donne F et G deux sous-espaces vectoriels et qu'on demande qui est
- $F+G$, il est facile de conclure si on dispose d'une base de F et d'une base de G (l'union des deux bases est une famille génératrice de $F+G$ et c'est une base si, et seulement si F et G sont en somme directe.
- $F \cap G$, il est facile de conclure si on dispose d'équations pour F et pour G : l'ensemble des équations mises ensemble définit $F \cap G$ (attention, il peut y avoir des équations redondantes).

Il faut savoir passer d'une forme à l'autre :

- **paramétrage vers équations :** on considère un $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ et on cherche à l'écrire comme combinaison linéaire des éléments de la base de notre sous-espace. Cela ne sera possible que si les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ vérifient des équations de compatibilité : ce sont les équations linéaires définissant notre sous-espace.
- **équations vers paramétrage :** cela revient à résoudre un système linéaire. Une fois le pivot de Gauss effectué, un certain nombre de variables peuvent être exprimées à partir des autres, qui sont *libres*. On en déduit facilement une base ayant pour cardinal le nombre de variables libres.

EXERCICE 3.21
Dans $\mathbb{R}^4$:

- Soit P le sous-espace engendré par les vecteurs $u = (1, 2, 3, 4)$ et $v = (1, 0, 1, 0)$. Donner la dimension de P et trouver un système d'équations linéaires définissant P.
- On considère Q le sous-espace des vecteurs (x, y, z, t) tels que $2x+3y-z = y+2t = 0$. Donner la dimension de Q et trouver une base de Q.
- Calculer $P \cap Q$ et $P + Q$.

3.4 Dimension des espaces d'applications linéaires

PROPOSITION 3.22 (Dimension de E^*)
Soit E de dimension finie n. Alors E^* est aussi de dimension finie n. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, la famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ de E^*, définie par $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ est une base de E^*.

REMARQUE 3.23
La famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est la base duale de la famille $(e_1, \dots, e_n)$. Elle est donc formée par les formes linéaires qui renvoient les coordonnées d'un vecteur de E, selon la base $\mathbf{e}$.

EXERCICE 3.24
On se place sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Expliciter la base duale de $\big((1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n\big)$.
2. Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels, deux à deux distincts. On note $L_0, \dots, L_n$ les polynômes de E tels que $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$.
   Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est un base de E ; expliciter sa base duale.

THÉORÈME 3.25 (Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$)
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension $\dim E \times \dim F$*. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et si $(f_1, \dots, f_p)$ est une base de F, une base de $\mathcal{L}(E, F)$ est donnée par la famille $(u_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, où*

$$\forall x \in E, u_{i,j}(x) = e_i^*(x) f_j.$$

REMARQUE 3.26
En fait, $u(x) = \sum_j f_j^*\big(u(x)\big) f_j$ et $u = \sum_{i,j} f_j^*\big(u(e_i)\big) u_{i,j}$.